

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

LITERATURA POMOCNICZA

- W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I i II*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- W. Stankiewicz, J. Wójtowicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, cz. I i II*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, Przykłady i zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, Kolokwia i egzaminy*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2, Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2, Przykłady i zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2, Kolokwia i egzaminy*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1, Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1, Przykłady i zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 2, Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 2, Przykłady i zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, *Algebra liniowa , Kolokwia i egzaminy*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne, Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna, Przykłady i zadania*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza GiS.

1 OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE UŻYWANE NA WYKŁADZIE

$x \in A$	x należy do zbioru A
$A \subset B$	zbiór A zawiera się w zbiorze B
$\sim p$	nieprawda, że p
$p \vee q$	p lub q
$p \wedge q$	p i q
$p \implies q$	p implikuje q , z p wynika q
$p \iff q$	p zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy q
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna zbiorów A i B
$A \setminus B$	różnica zbiorów A i B
$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów A i B
$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-razy}}$	n -ta potęga zbioru A
$:=$	równa się z definicji
$\equiv$	równe tożsamościowo
$\forall x$	dla każdego x
$\exists x$	istnieje x
$\emptyset$	zbiór pusty
∞	nieskończoność
$\{x \in A : p(x)\}$	ogół (zbiór) x należących do zbioru A takich, że zachodzi $p(x)$
$\sum_{x \in A} x$	suma elementów zbioru A
$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + \dots + x_n$	suma elementów $x_1, \dots, x_n$
$k \parallel l$	k równoległa do l
$k \perp l$	k prostopadła do l
■	koniec dowodu

2 ZBIORY LICZBOWE

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	liczby naturalne (natural)
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	liczby całkowite (zahl)
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	liczby wymierne (quotient)
$\mathbb{R}$	liczby rzeczywiste (real)

OBSERWACJA

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

UWAGA:

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego.

Przykład 1 $\frac{3}{11} = 0, (27) = 0,27272727\dots$

Przykład 2 $\frac{1}{8} = 0,125$.

UWAGA:

Każda liczba, której rozwinięcie jest skończone lub nieskończone ale okresowe jest wymierna.

Przykład 3 $1,05 = 1 + \frac{5}{100} = 1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20}$.

Przykład 4 $2,8(3) = 2,8 + 0,0(3) = \frac{28}{10} + (\frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots) = \frac{14}{5} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{14}{5} + \frac{1}{30} = \frac{85}{30} = \frac{17}{6}$.

UWAGA:

Liczby niewymierne $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są to liczby o nieskończonym i nieokresowym rozwinięciu dziesiętnym.

Przykład 5 $\sqrt{2} = 1,414213562\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\sin 4 = -0,756802495\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\pi = 3,141592654\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczba pi = długość półokręgu o promieniu 1

$e = 2,718281828\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczba Eulera = $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Definicja.

Zbiorem skończonym nazywamy zbiór o skończonej liczbie elementów (skończonej mocy), a zbiorem nieskończonym zbiór o nieskończonej liczbie elementów (nieskończonej mocy).

OZNACZENIE $\overline{A}$ – moc zbioru A

Przykład 6 $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$.

$\overline{\{\emptyset\}} = 1$.

$\overline{\{-1, 0, 1\}} = 3$.

$\overline{\mathbb{N}} = \infty$.

$$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \infty.$$

$$\overline{(0; 1)} = \infty.$$

Definicja.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Przedział o lewym końcu a i prawym końcu b (przedział a, b) definiujemy jako :

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{przedział otwarty}$$

$$\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{przedział domknięty}$$

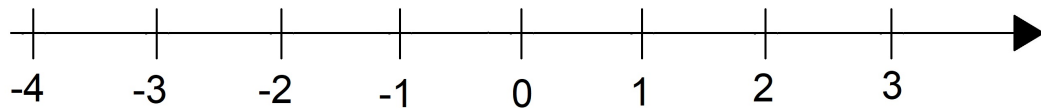
$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{przedział otwarto-domknięty}$$

$$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{przedział domknięto-otwarty}$$

Przykład 7 $(-2, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 5\}$.

UWAGA:

Zbiory liczbowe możemy zaznaczać na tzw. osi liczbowej, czyli prostej z zaznaczonymi jednostkami.



Rysunek 1: Oś liczbową

Definicja.

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $A \subset \langle a, b \rangle$. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy nieograniczonym, jeżeli nie jest ograniczony.

Przykład 8 $\emptyset$ jest ograniczony, bo $\emptyset \subset \langle 0; 1 \rangle$.

$(0, 1)$ jest ograniczony, bo $(0; 1) \subset \langle 0; 1 \rangle$.

$\mathbb{Z}$ jest nieograniczony.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ jest nieograniczony.

$\{e, \pi\}$ jest ograniczony, bo $\{e, \pi\} \subset \langle 2, 4 \rangle$.

OBSERWACJA

Każdy zbiór skończony jest ograniczony.

Definicja.

Liczbę $a \in A$ nazywamy elementem największym [najmniejszym] zbioru A , jeżeli $\forall b \in A \quad b \leq a$ [$a \leq b$].

Definicja.

Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy ograniczeniem górnym [dolnym] zbioru A , jeżeli $\forall b \in A \quad b \leq a$ [$a \leq b$].

Definicja.

Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy kresem górnym (supremum) [kresem dolnym (infimum)] zbioru A , jeżeli jest elementem najmniejszym [największym] zbioru ograniczeń górnych [dolnych] zbioru A .

OZNACZENIE

$\sup A$ – supremum zbioru A .

$\inf A$ – infimum zbioru A .

OBSERWACJA

$$a = \sup A \Leftrightarrow \quad 1^\circ \forall b \in A \quad b \leq a; \quad 2^\circ \forall c \in \mathbb{R} \quad (\forall b \in A \quad b \leq c) \Rightarrow a \leq c.$$

Przykład 9 $A = \{-1, 0\} \cup \langle 1, 2 \rangle$.

Elementem najmniejszym zbioru A jest -1 . A nie ma elementu największego.

Każda liczba z przedziału $\langle 2; +\infty \rangle$ jest ograniczeniem górnym zbioru A .

Każda liczba z przedziału $(-\infty; -1 \rangle$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A .

$$\sup A = 2,$$

$$\inf A = -1.$$

Definicja.

Jeśli żadna liczba nie jest kresem górnym [dolnym] zbioru A , to mówimy, że kresem górnym [dolnym] jest $+\infty$ [$-\infty$].

OBSERWACJA

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : b < a.$$

Przykład 10 $A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\}$.

Elementem największym A jest 0 . A nie ma elementu najmniejszego.

Każda liczba z przedziału $\langle 0, +\infty \rangle$ jest ograniczeniem górnym A . A nie ma ograniczeń dolnych.

$$\sup A = 0,$$

$$\inf A = -\infty.$$

UWAGA:

$$\sup \emptyset = -\infty$$

$$\inf \emptyset = +\infty.$$

Przykład 11 $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Elementem największym A jest 1. A nie ma elementu najmniejszego.

Każda liczba z przedziału $\langle 1; +\infty \rangle$ jest ograniczeniem górnym A .

Każda liczba z przedziału $(-\infty; 0)$ jest ograniczeniem dolnym A .

$\sup A = 1,$

$\inf A = 0.$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

3 FUNKCJE RZECZYWISTE JEDNEJ ZMIENNEJ

Definicja.

Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ jednego elementu $y \in Y$.

Taką funkcję oznaczamy $f : X \rightarrow Y$, a wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy $f(x)$.

Definicja.

Niech $f : X \rightarrow Y$ (f prowadzi z X w Y)

X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy D_f . Elementy D_f nazywamy argumentami funkcji f .

Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f . Zbiór $W_f := \{y \in Y : \exists x \in X y = f(x)\}$ nazywamy zbiorem wartości funkcji f , a jego elementy wartościami f .

OBSERWACJA

$W_f \subset Y$.

Definicja.

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

Definicja.

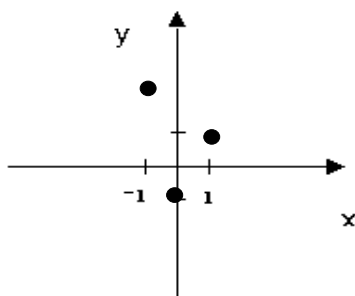
Jeżeli dla funkcji f zachodzi $D_f \subset \mathbb{R}$ i $W_f \subset \mathbb{R}$ (jej argumenty i wartości są liczbami rzeczywistymi), to mówimy o funkcji rzeczywistej jednej zmiennej.

Od tej pory przez cały I semestr będziemy zajmować się wyłącznie funkcjami rzeczywistymi jednej zmiennej, tzn. funkcjami postaci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$.

UWAGA:

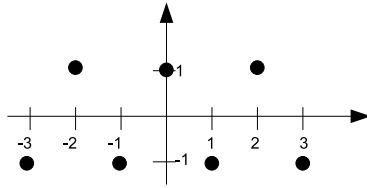
Wykres funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ możemy rysować w układzie kartezjańskim jako punkty o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie $x \in D_f$

Przykład 12 $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(-1) = 2$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ $W_f = \{-1, 1, 2\}$.

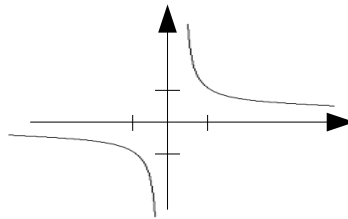


Rysunek 1:

Przykład 13 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^x$, $W_f = \{-1, 1\}$.

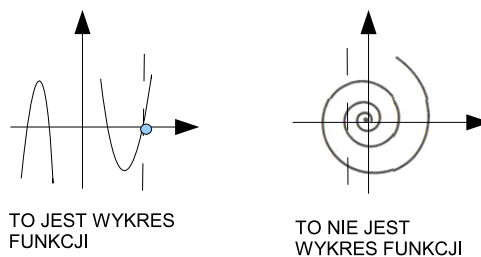
Rysunek 2: $f(x) = (-1)^x$

Przykład 14 $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rysunek 3: $f(x) = \frac{1}{x}$

UWAGA:

Wykres funkcji może się przecinać z dowolną prostą pionową w co najwyżej jednym punkcie.



Rysunek 4:

Definicja.

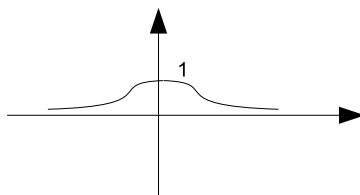
Niech $A \subset X$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Zawężeniem funkcji f do zbioru A nazywamy funkcję $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f|_A(x) = f(x), \forall x \in A$.

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, jeżeli zbiór jej wartości W_f jest ograniczony.

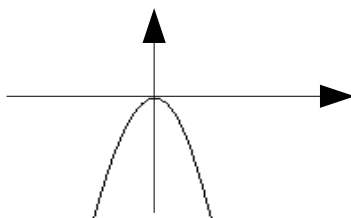
Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieograniczona, jeżeli nie jest ograniczona.

Przykład 15 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest funkcją ograniczoną, bo $W_f = (0, 1]$ jest zbiorem ograniczonym (patrz Rys.5).



Rysunek 5: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Przykład 16 $f(x) = -x^2$ jest funkcją nieograniczoną, bo $W_f = (-\infty, 0]$ jest zbiorem nieograniczonym (patrz Rys.6).



Rysunek 6: $f(x) = -x^2$

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa, jeżeli

$$\exists t > 0 \forall x \in D_f \ x + t \in D_f \wedge x - t \in D_f \wedge f(x+t) = f(x)$$

Liczbę t nazywamy okresem funkcji f . Najmniejszy okres funkcji (o ile istnieje) nazywamy jej okresem podstawowym.

Przykład 17 Niech $[x]$ oznacza część całkowitą (tzw. cechę) liczby x

(np. $[2] = 2, [-\frac{1}{3}] = -1, [\pi] = 3$.)

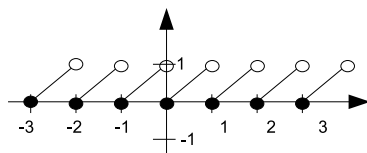
Niech $\langle x \rangle = x - [x]$ oznacza część ułamkową (tzw. mantysę) liczby x

(np. $\langle 2 \rangle = 0, \langle -\frac{1}{3} \rangle = \frac{2}{3}, \langle \pi \rangle = 0,1415926\dots$).

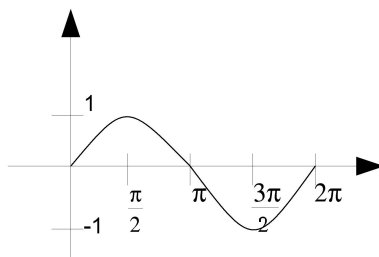
Funkcja $f(x) = \langle x \rangle$ jest funkcją okresową, której okresami są dowolne liczby naturalne, a okresem podstawowym jest 1.

Przykład 18 Funkcja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, zwana funkcją Dirichleta, jest funkcją okresową, której okresami są dowolne liczby wymierne dodatnie.

Funkcja ta nie ma okresu podstawowego.

Rysunek 7: $f(x) = \langle x \rangle$

Przykład 19 Funkcja $f : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sin x$ nie jest funkcją okresową, bo $\forall t > 0 \quad 2\pi + t \notin D_f$

Rysunek 8: $f(x) = \sin x$

UWAGA:

Po rozszerzeniu dziedziny tej funkcji do zbioru $\mathbb{R}$ funkcja ta staje się funkcją okresową o okresie podstawowym 2π .

Definicja.

Funkcja $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta, jeżeli $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.

Funkcja $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieparzysta, jeżeli $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$.

UWAGA:

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy.

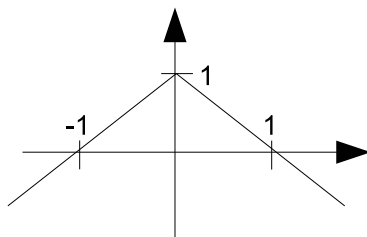
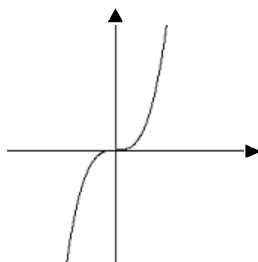
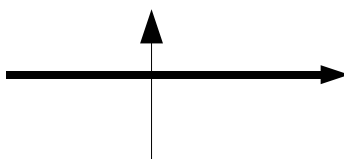
Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem środka układu współrzędnych $(0, 0)$.

Przykład 20 Funkcja $f(x) = 1 - |x|$ jest parzysta, bo $f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$.

Przykład 21 Funkcja $f(x) = x^3$ jest nieparzysta, bo $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Przykład 22 Funkcja $f(x) = 0$ jest parzysta i nieparzysta, bo $f(-x) = f(x) = -f(x) = 0$.

Przykład 23 Funkcja $f(x) = x + 1$ nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, bo $f(-1) = 0, f(1) = 2$ a więc $f(-1) \neq f(1)$ i $f(-1) \neq -f(1)$.

Rysunek 9: $f(x) = 1 - |x|$ Rysunek 10: $f(x) = x^3$ Rysunek 11: $f(x) = 0$ **Definicja.**

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\left| \begin{array}{l} \text{rosnąca} \\ \text{malejąca} \\ \text{niemalejąca} \\ \text{nierosnąca} \end{array} \right|$, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in D_f \ x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{array} \right|$.

Funkcję rosnącą lub malejącą nazywamy **funkcją silnie monotoniczną**.

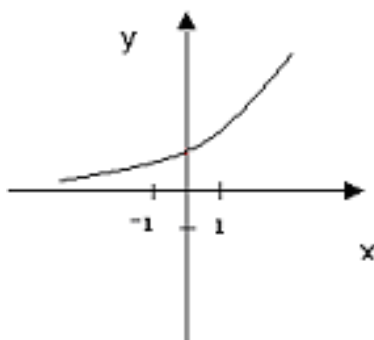
Funkcję niemalejącą lub nierosnącą nazywamy **funkcją słabo monotoniczną**.

Przykład 24 Funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca, bo $x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$.

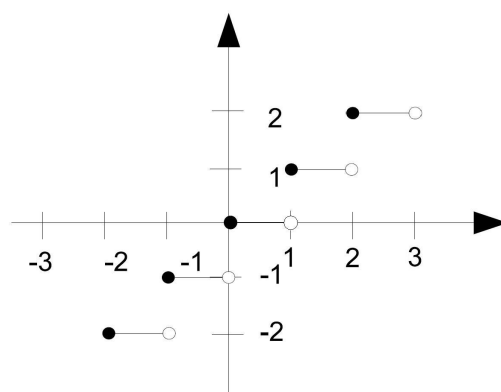
Przykład 25 Funkcja $f(x) = [x]$ jest niemalejąca, bo $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2]$.

Przykład 26 Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest monotoniczna, bo nie jest rosnąca ($1 < 2$, ale $f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2)$) i nie jest malejąca ($-1 < 1$, ale $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$).

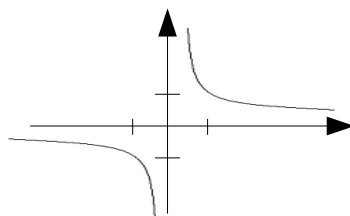
Jest ona natomiast malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$.



Rysunek 12: $f(x) = 2^x$



Rysunek 13: $f(x) = [x]$



Rysunek 14: $f(x) = \frac{1}{x}$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **iniekcją** (funkcją różnowartościową), jeżeli
 $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

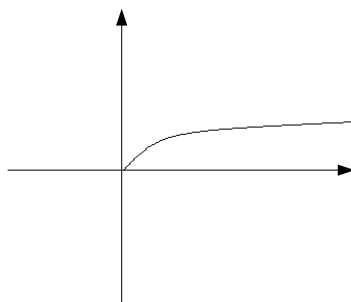
Definicja.

Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **suriekcją** (funkcją z X na $\mathbb{R}$), jeżeli $W_f = \mathbb{R}$.

Definicja.

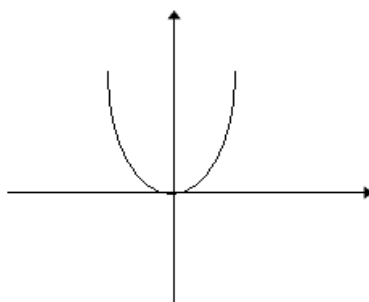
Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **bijekcją** (funkcją 1 – 1), jeżeli jest suriekcją i iniekcją.

Przykład 27 Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest iniekcją, ale nie suriekcją ($W_f = \langle 0; +\infty \rangle \neq \mathbb{R}$)

Rysunek 1: $f(x) = \sqrt{x}$

Przykład 28 Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest suriekcją, ale nie iniekcją ($0 \neq \pi$, ale $f(0) = 0 = f(\pi)$).

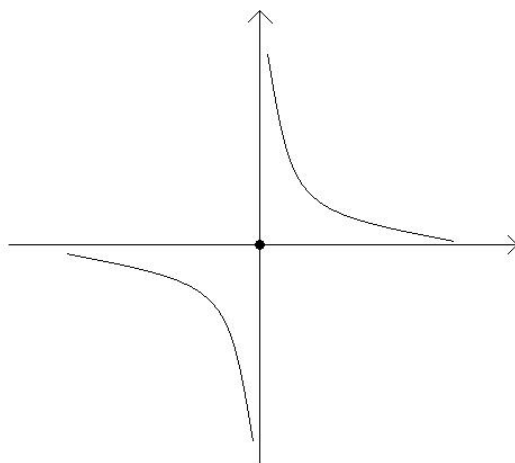
Przykład 29 Funkcja $f(x) = x^2$ nie jest iniekcją, ($-1 \neq 1$, ale $f(-1) = 1 = f(1)$), ani suriekcją ($W_f = \langle 0; +\infty \rangle \neq \mathbb{R}$).

Rysunek 2: $f(x) = x^2$

Przykład 30 Funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ jest bijekcją.

UWAGA:

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest iniekcją $\Leftrightarrow$ wykres G_f przecina się z dowolną prostą poziomą co najwyżej

Rysunek 3: Wykres funkcji f z przykładu 30

w jednym punkcie.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest suriekcją $\Leftrightarrow$ wykres G_f przecina się z dowolną prostą poziomą co najmniej w jednym punkcie.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją $\Leftrightarrow$ wykres G_f przecina się z dowolną prostą poziomą dokładnie w jednym punkcie.

OBSERWACJA

Funkcja f jest silnie monotoniczna $\Rightarrow f$ jest iniekcją
 $\nLeftarrow$ (patrz przykład 30)

Definicja.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym $X, Y \subset \mathbb{R}$ oraz $W_f \subset D_g$.

Możemy wtedy zdefiniować funkcję $g \circ f$ będącą złożeniem funkcji g (tzw funkcji zewnętrznej) i funkcji f (funkcji wewnętrznej) wzorem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in D_f.$$

UWAGA:

Analogicznie można zdefiniować złożenie większej liczby funkcji.

Przykład 31 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

$W_f = \langle 1; +\infty \rangle \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = D_g \Rightarrow$ można złożyć funkcję g z funkcją f :

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$W_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} = D_f \implies$ można złożyć funkcję f z funkcją g :

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2} + 1.$$

UWAGA:

Składanie funkcji nie jest operacją przemianową. W przykładzie 31

$$(g \circ f)(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \neq 2 = \frac{1}{1^2} + 1 = (f \circ g)(1),$$

$(g \circ f)(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1$, natomiast funkcja $f \circ g$ nie jest określona w 0.

Przykład 32 Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x+1)-2}$, jest złożeniem funkcji $m \circ l \circ k \circ h \circ g$, gdzie

$$g(x) = x + 1,$$

$$h(y) = \sin y,$$

$$k(z) = z^2,$$

$$l(s) = s - 2,$$

$$m(t) = \frac{1}{t}.$$

Definicja.

Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest odwracalna, gdy $\exists g : W_f \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$(1) \quad \forall x \in D_f \quad (g \circ f)(x) = x,$$

$$(2) \quad \forall y \in D_g \quad (f \circ g)(y) = y.$$

Funkcję g nazywamy wtedy funkcją odwrotną do funkcji f i oznaczamy f^{-1} .

OBSERWACJA

Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwracalna $\iff f$ jest iniekcją.

OBSERWACJA

Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ są do siebie wzajemnie odwrotne $\iff$

$$(1) \quad W_f = D_g \text{ i } W_g = D_f$$

$$(2) \quad \text{Wykresy } G_f \text{ i } G_g \text{ są symetryczne względem prostej } y = x.$$

Przykład 33 Funkcja $f(x) = 3x - 2$ jest odwracalna (jako bijekcja).

Aby znaleźć wzór na funkcję odwrotną $f^{-1} = g$ skorzystamy z definicji funkcji odwrotnej.

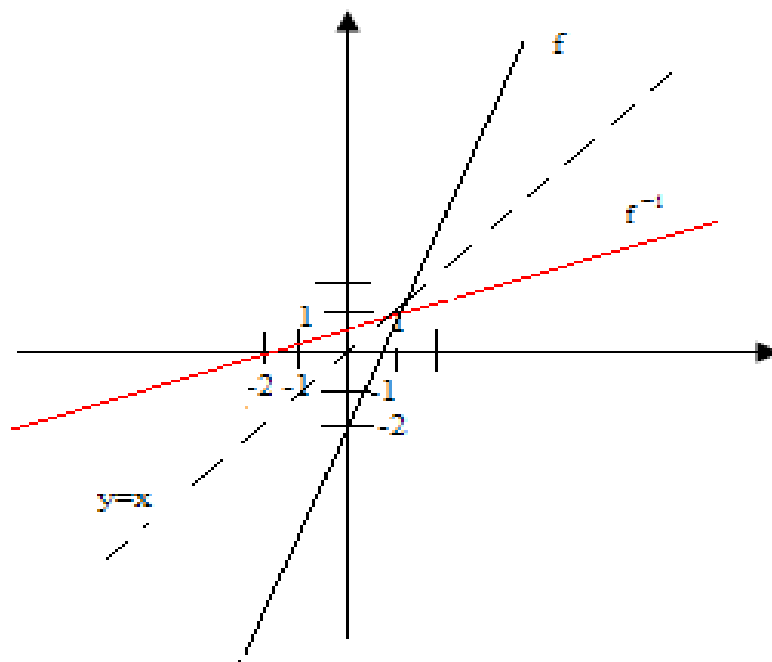
$$f(g(y)) = y \implies 3g(y) - 2 = y \implies 3g(y) = y + 2 \implies g(y) = \frac{y+2}{3}.$$

Przykład 34 Funkcja $f(x) = x^2$ nie jest odwracalna w całej swojej dziedzinie (bo nie jest iniekcją)

Ale po zawężeniu dziedziny do przedziału $\langle 0; +\infty \rangle$ funkcja staje się iniekcją i jest odwracalna.

Odwrotna do niej zadana jest wzorem $g(y) = \sqrt{y}$.

$$\text{Rzeczywiście, } \begin{array}{ll} \forall x \geq 0 & g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x \\ \forall y \geq 0 & f(g(y)) = (\sqrt{y})^2 = y \end{array}.$$



Rysunek 4:

Definicja.

Pierwiastkiem (miejscem zerowym) funkcji $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy taki argument $x \in D_f$, dla którego $f(x) = 0$.

Zbiór pierwiastków funkcji f będziemy oznaczać $P_f := \{x \in D_f : f(x) = 0\}$.

Definicja.

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje:

(1) stałe; (2) potęgowe; (3) wykładnicze; (4) logarytmiczne; (5) trygonometryczne; (6) cyklometryczne.

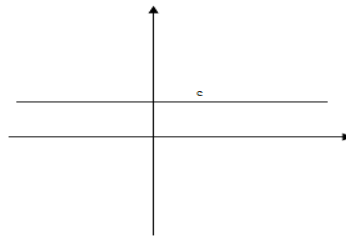
Definicja.

Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia) oraz operacji składania funkcji.

PRZEGLĄD PODSTAWOWYCH FUNKCJI ELEMENTARNYCH

(1) FUNKCJE STAŁE

Postać: $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$$f(x) = c$$

Własności: $D_f = \mathbb{R}$.

$W_f = \{c\} \implies f$ ograniczona.

$$P_f = \begin{cases} \emptyset & , c \neq 0 \\ \mathbb{R} & , c = 0 \end{cases}$$

f jest okresowa. Jej okresami są dowolne liczby dodatnie. f nie ma okresu podstawowego.

f jest parzysta $\forall c \in \mathbb{R}$.

f jest nieparzysta $\iff c = 0$.

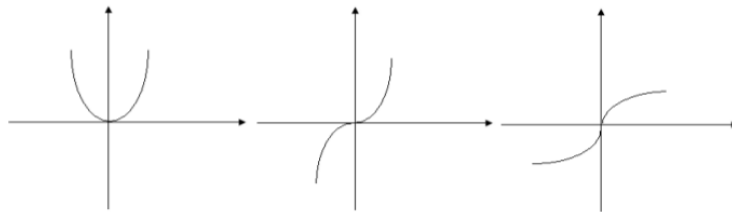
f jest niemalejąca i nierosnąca. Nie jest silnie monotoniczna w żadnym przedziale.

f nie jest ani iniekcją ani suriekcją, więc nie jest odwracalna.

(2) FUNKCJE POTĘGOWE

Postać: $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 0$.

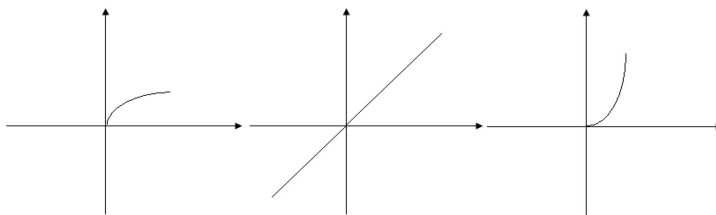
OZNACZENIE $\mathbb{E} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}, \mathbb{O} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$.



(a) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$,
 $p \in \mathbb{E}, q \in \mathbb{O}$,

(b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$,
 $p, q \in \mathbb{O}$,

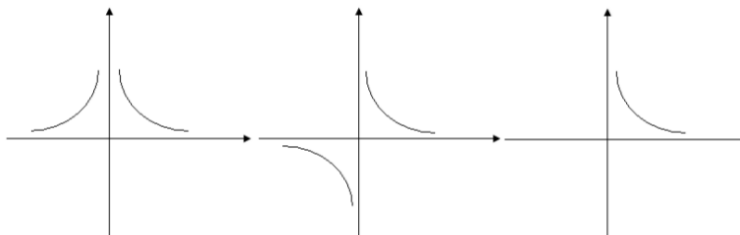
(c) $\alpha = \frac{p}{q} \in (0, 1)$,
 $p, q \in \mathbb{O}$,



(d) $\alpha = \frac{p}{q} \in (0, 1)$,
 $p \in \mathbb{O}, q \in \mathbb{E}$,
 $\forall \alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$,

(e) $\alpha = 1$,

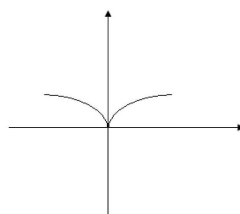
(f) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$,
 $p \in \mathbb{O}, q \in \mathbb{E}$,
 $\forall \alpha \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{Q}$,



(g) $\alpha = \frac{p}{q} < 0$,
 $p \in \mathbb{E}, q \in \mathbb{O}$,

(h) $\alpha = \frac{p}{q} < 0$,
 $p, q \in \mathbb{O}$,

(i) $\alpha = \frac{p}{q} < 0$,
 $p \in \mathbb{O}, q \in \mathbb{E}$,
 $\forall \alpha \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Q}$,



(j) $\alpha = \frac{p}{q} \in (0, 1)$,
 $p \in \mathbb{E}, q \in \mathbb{O}$.

Własności:

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ w przypadku (a),(b),(c),(e),(j)} \\ (0; +\infty) & , \text{ w przypadku (d),(f)} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & , \text{ w przypadku (g),(h)} \\ (0; +\infty) & , \text{ w przypadku (i)} \end{cases}$$

$$W_f = \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ w przypadku (b),(c),(e)} \\ (0; +\infty) & , \text{ w przypadku (a),(d),(f),(j)} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & , \text{ w przypadku (h)} \\ (0; +\infty) & , \text{ w przypadku (g),(i)} \end{cases} \Rightarrow f \text{ zawsze nieograniczona.}$$

$$P_f = \begin{cases} \{0\} & , \text{ w przypadku (a),(b),(c),(d),(e),(f),(j),} \quad \text{tzn. } \alpha > 0 \\ \emptyset & , \text{ w przypadku (g),(h),(i),} \quad \text{tzn. } \alpha < 0 \end{cases}$$

f nie jest okresowa.

f jest parzysta w przypadku (a), (g) i (j).

f jest nieparzysta w przypadku (b),(c),(e) i (h).

f jest rosnąca w przypadku (b),(c),(d),(e) i (f).

f jest malejąca w przypadku (i).

W pozostałych przypadkach f jest monotoniczna przedziałami.

f jest suriekcją w przypadku (b),(c) i (e).

f jest iniekcją w przypadku (b),(c),(d),(e),(f),(h) i (i).

Po zawężeniu dziedziny do $(0, +\infty)$ w przypadkach (a) i (j) oraz do $(0, +\infty)$ w przypadku (g) f też staje się iniekcją.

Zawsze więc przynajmniej część dziedziny f jest odwracalna. Odwrotna do niej też jest funkcją potęgową i zadana jest wzorem $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

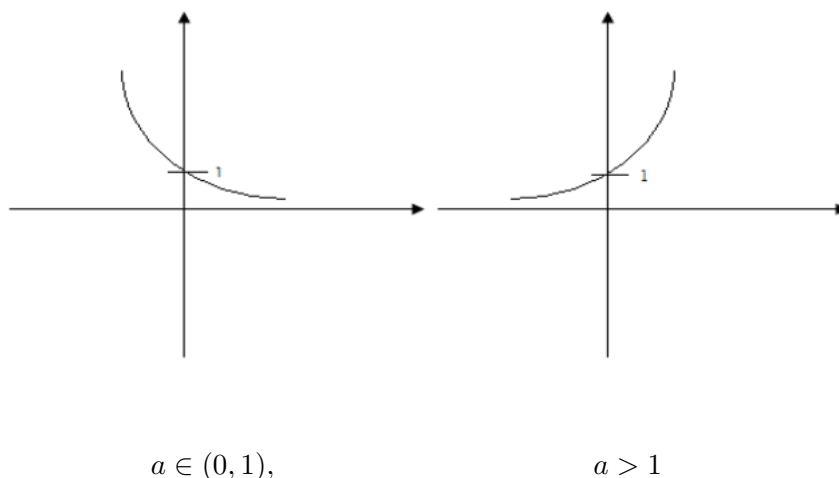
MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

(3) FUNKCJE WYKŁADNICZE

Postać: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



Własności:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$W_f = (0, +\infty) \implies f$ zawsze nieograniczona.

$$P_f = \emptyset.$$

f nie jest okresowa.

f nie jest parzysta ani nieparzysta.

f jest rosnąca dla $a > 1$, a malejąca dla $a \in (0, 1)$. Jest więc iniekcją i jest odwracalna (nie jest suriekcją).

Odwrotna do f to funkcja logarytmiczna $f^{-1}(y) = \log_a y$.

(4) FUNKCJE LOGARYTMICZNE

Definicja.

$$a > 0, a \neq 1, x > 0$$

Logarytm o podstawie a z liczby x definiujemy następująco:

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

UWAGA:

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy logarytmem dziesiętnym i zamiast pisać $\log_{10} x$ piszemy $\log x$.

Logarytm o podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i zamiast pisać $\log_e x$ piszemy $\ln x$.

Twierdzenie Własności logarytmów

$$1. \log_a a^x = x$$

$$2. a^{\log_a x} = x$$

$$3. \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$4. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5. \log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$$

$$6. \log_a x = \frac{\log_p x}{\log_p a} \text{ (ZMIANA PODSTAWY LOGARYTMU)}$$

$$\text{W szczególności: } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

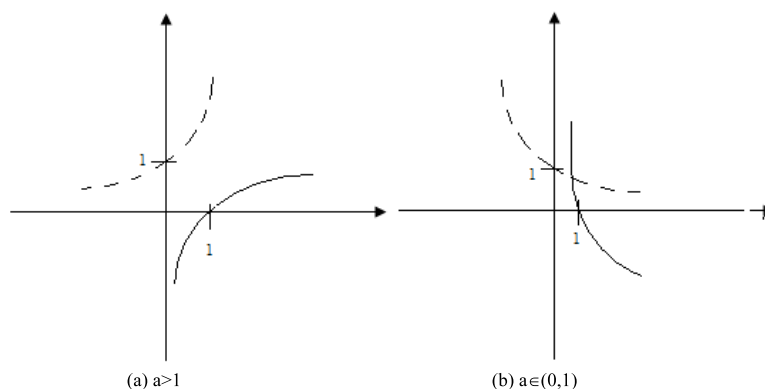
$$7. \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

UWAGA:

Własności (1) i (2) oznaczają, że funkcje $f(x) = a^x$ i $g(y) = \log_a y$ są do siebie wzajemnie odwrotne. Zatem wykres funkcji logarytmicznej można uzyskać z wykresu funkcji wykładniczej odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$.

Postać: $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Własności: $D_f = (0; +\infty)$



$W_f = \mathbb{R} \implies f$ zawsze nieograniczona i f jest suriekcją.

$$P_f = \{1\}$$

f nie jest okresowa.

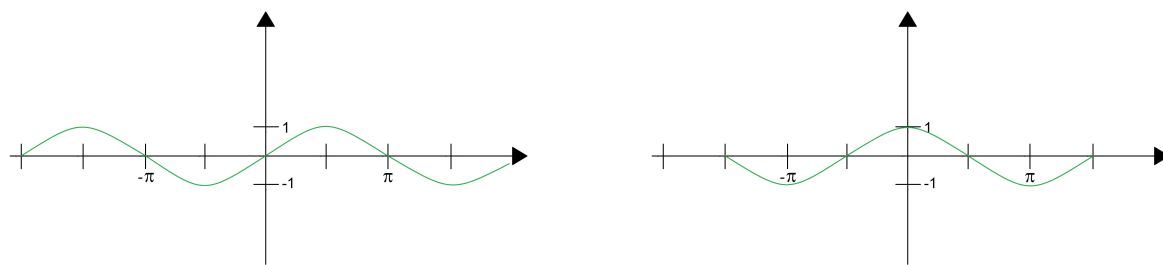
f nie jest parzysta ani nieparzysta.

f jest rosnąca dla $a > 1$, a malejąca dla $a \in (0, 1)$.

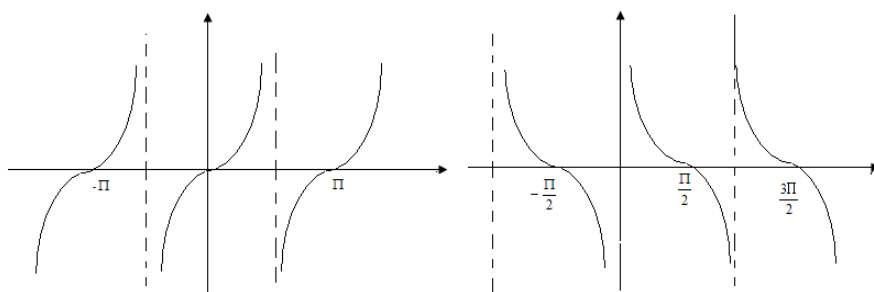
f jest iniekcją i jest odwracalna.

Odwrotna do f jest to funkcja wykładnicza zadana wzorem $f^{-1}(y) = a^y$.

(5) FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE



Rysunek 1: sinus i kosinus



Rysunek 2: tangens i kotangens

Własności $f_1(x) = \sin x$:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}.$$

$$W_{f_1} = \langle -1; 1 \rangle \Rightarrow f_1 \text{ ograniczona}$$

$$P_{f_1} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

f_1 jest okresowa o okresie podstawowym 2π .

f_1 jest nieparzysta.

f_1 jest monotoniczna jedynie przedziałami, ale nie w całej swojej dziedzinie. Nie jest też iniekcją.

f_1 nie jest suriekcją.

$g_1 := f_1|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ jest iniekcją $\Rightarrow$ jest odwracalna.

Odwrotna do niej to funkcja cyklometryczna $g_1^{-1}(y) = \arcsin y$.

Własności $f_2(x) = \cos x$:

$$D_{f_2} = \mathbb{R}.$$

$$W_{f_2} = \langle -1; 1 \rangle \Rightarrow f_2 \text{ ograniczona.}$$

$$P_{f_2} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

f_2 jest okresowa o okresie podstawowym 2π .

f_2 jest parzysta.

f_2 jest monotoniczna jedynie przedziałami, ale nie w całej swojej dziedzinie. Nie jest też iniekcją.

f_2 nie jest suriekcją

$g_2 := f_2|_{\langle 0, \pi \rangle}$ jest iniekcją $\Rightarrow$ jest odwracalna.

Odwrotna do niej to funkcja cyklometryczna $g_2^{-1}(y) = \arccos y$.

Własności $f_3(x) = \operatorname{tg} x$:

$D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$W_{f_3} = \mathbb{R} \Rightarrow f_3$ nieograniczona suriekcja.

$P_{f_3} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

f_3 jest okresowa o okresie podstawowym π .

f_3 jest nieparzysta

f_3 jest monotoniczna jedynie przedziałami, ale nie w całej swojej dziedzinie. Nie jest też iniekcją.

$g_3 := f_3|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ jest iniekcją $\Rightarrow$ jest odwracalna.

Odwrotna do niej to funkcja cyklometryczna $g_3^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$.

Własności $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$:

$D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$W_{f_4} = \mathbb{R} \Rightarrow f_4$ nieograniczona suriekcja.

$P_{f_4} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

f_4 jest okresowa o okresie podstawowym π .

f_4 jest nieparzysta.

f_4 jest monotoniczna jedynie przedziałami, ale nie w całej swojej dziedzinie. Nie jest też iniekcją.

$g_4 := f_4|_{(0, \pi)}$ jest iniekcją $\Rightarrow$ jest odwracalna.

Odwrotna do niej to funkcja cyklometryczna $g_4^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$.

(6) FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE (KOŁOWE)

Definicja.

$x \in \langle -1; 1 \rangle$. Arkusz sinus z liczby x definiujemy jako jedyną liczbę $y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ spełniającą warunek $\sin y = x$. Liczbę tę oznaczamy $y = \arcsin x$.

Definicja.

$x \in \langle -1; 1 \rangle$. Arkusz kosinus z liczby x definiujemy jako jedyną liczbę $y \in \langle 0; \pi \rangle$ spełniającą warunek $\cos y = x$. Liczbę tę oznaczamy $y = \arccos x$.

Definicja.

$x \in \mathbb{R}$. Arkusz tangens z liczby x definiujemy jako jedyną liczbę $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ spełniającą warunek $\operatorname{tg} y = x$. Liczbę tę oznaczamy $y = \operatorname{arctg} x$.

Definicja.

$x \in \mathbb{R}$. Arkusz kotangens z liczby x definiujemy jako jedyną liczbę $y \in (0; \pi)$ spełniającą warunek $\operatorname{ctg} y = x$. Liczbę tę oznaczamy $y = \operatorname{arcctg} x$.

Twierdzenie (Własności arkusów)

1. $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$
 $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in \langle 0; \pi \rangle$
 $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
 $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \forall x \in (0; \pi)$
2. $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in \langle -1; 1 \rangle$
 $\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in \langle -1; 1 \rangle$
 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \langle -1; 1 \rangle$
4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
 $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
 $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
6. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$
 $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$

UWAGA:

Własności (1) i (2) oznaczają, że funkcje:

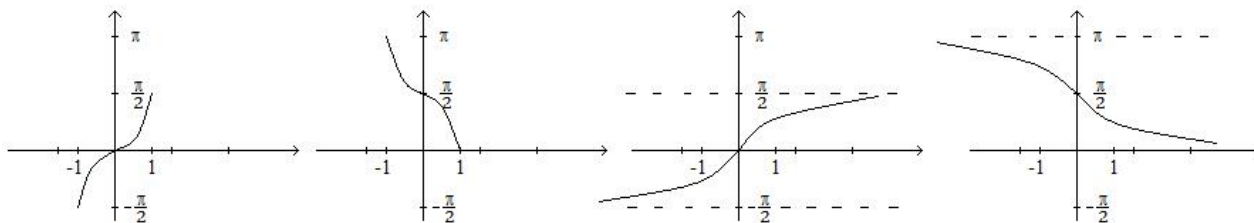
- $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle}$ i $\arcsin$
- $\cos|_{\langle 0; \pi \rangle}$ i $\arccos$;
- $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}$ i arctg ;
- $\operatorname{ctg}|_{(0; \pi)}$ i arcctg ;

są do siebie wzajemnie odwrotne. Zatem wykresy funkcji cyklometrycznych można uzyskać z fragmentów wykresów funkcji trygonometrycznych odbijając je symetrycznie względem prostej $y = x$.

Postać:

$$f_1(x) = \arcsin x, \quad f_2(x) = \arccos x, \quad f_3(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f_4(x) = \operatorname{arcctg} x.$$

Wykres:



Własności:

$$D_{f_1} = \langle -1; 1 \rangle$$

$$D_{f_2} = \langle -1; 1 \rangle$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$D_{f_4} = \mathbb{R}$$

$$W_{f_1} = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$W_{f_2} = \langle 0; \pi \rangle$$

$$W_{f_3} = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$W_{f_4} = (0; \pi)$$

funkcja ograniczona

funkcja ograniczona

funkcja ograniczona

funkcja ograniczona

$$P_{f_1} = \{0\}$$

$$P_{f_2} = \{1\}$$

$$P_{f_3} = \{0\}$$

$$P_{f_4} = \emptyset$$

f_1 nie jest okresowa

f_2 nie jest okresowa

f_3 nie jest okresowa

f_4 nie jest okresowa

f_1 jest nieparzysta

f_3 jest nieparzysta

f_1 jest rosnąca

f_2 jest malejąca

f_3 jest rosnąca

f_4 jest malejąca

Żadna z funkcji f_1, f_2, f_3, f_4 nie jest suriekcją, a wszystkie są iniekcjami, czyli odwrotne do nich to zawężenia funkcji trygonometrycznych zadane wzorami:

$$f_1^{-1}(y) = \sin y, \quad f_2^{-1}(y) = \cos y, \quad f_3^{-1}(y) = \operatorname{tg} y, \quad f_4^{-1}(y) = \operatorname{ctg} y.$$

MATEMATYKA

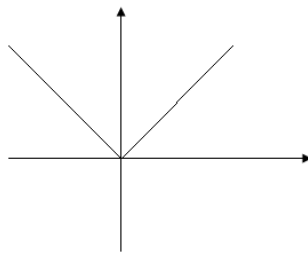
Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

NIEKTÓRE TYPY FUNKCJI ELEMENTARNYCH**(1) WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA (MODUŁ)****Definicja.**

Wartością bezwzględną (modułem) nazywamy funkcję $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



Rysunek 1: $f(x) = |x|$

Twierdzenie (Własności modułu)

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
7. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
8. $|x| = \sqrt{x^2}$

UWAGA:

Własność (8) oznacza, że moduł jest złożeniem dwóch podstawowych funkcji elementarnych (funkcji kwadratowej i pierwiastka), a zatem jest funkcją elementarną.

(2) WIELOMIANY**Definicja.**

Wielomianem nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{0, \dots, n\}$. Liczby a_i nazywamy współczynnikami wielomianu, w szczególności liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu i oznaczamy przez $\deg W$ (od ang. degree). Przyjmuje się, że wielomian zerowy $W \equiv 0$ ma stopień -1 .

Przykład 35 $W_1(x) = -2$ jest wielomianem stopnia 0 o wyrazie wolnym $a_0 = -2$.

$W_2(x) = 4x^2 - 3x$ jest wielomianem stopnia 2 o wyrazie wolnym $a_0 = 0$.

$W_3(x) = x^{999} - \pi x - \frac{5}{2}$ jest wielomianem stopnia 999 o wyrazie wolnym $a_0 = -\frac{5}{2}$.

UWAGA:

Każdy wielomian jest skończoną sumą iloczynów funkcji stałych (swoich współczynników) przez funkcje potęgowe, a zatem jest funkcją elementarną.

Definicja.

Mówimy, że wielomian W jest podzielny przez wielomian V , jeżeli istnieje wielomian P taki, że:

$$W(x) = P(x) \cdot V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ (tzn. } W \equiv PV.)$$

Podzielność W przez V oznaczamy $V \mid W$, a niepodzielność $V \nmid W$.

Definicja.

Wielomian W nazywamy nierozkładalnym, jeśli z faktu, że $W \equiv PV$ wynika, że $\deg P = \deg W$ lub $\deg V = \deg W$.

Twierdzenie (Dzielenie wielomianu z resztą)

Niech W, V - wielomiany takie, że $\deg V \leq \deg W$. Wówczas istnieją jedno jedyne wielomiany P i R takie, że

$$W(x) = P(x) \cdot V(x) + R(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

przy czym $\deg R < \deg V$.

Definicja.

Wielomian R nazywamy resztą z dzielenia wielomianu W przez wielomian V .

OBSERWACJA

$V \mid W \iff R \equiv 0$ (reszta z dzielenia W przez V jest zerowa).

Przykład 36 (Algorytm dzielenia wielomianów)

$$W(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2$$

$$V(x) = x^4 - 1$$

$$\begin{array}{r} (x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2) : (x^4 - 1) = x + 1 = P(x) \\ -(x^5 - x) \\ \hline x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 2 \\ -(x^4 - 1) \\ \hline 3x^3 + x^2 + x - 1 = R(x) \end{array}$$

$$\text{Czyli } x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = (x + 1)(x^4 - 1) + 3x^3 + x^2 + x - 1.$$

Twierdzenie (Bézouta)

$a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W \iff (x - a) | W$.

Przykład 37 (schemat Hornera)

$$W(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2.$$

$$V(x) = x + 1 = x - (-1).$$

	1	1	3	1	0	-2
-1	1	0	3	-2	2	-4

Liczby zaznaczone na czerwono, to współczynniki wyniku dzielenia, a na fioletowo - reszta z dzielenia.

Czyli

$$x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = (x^4 + 3x^2 - 2x + 2)(x + 1) - 4.$$

Przykład 38 $W(x) = x^3 - 1$.

$$V(x) = x - 1.$$

	1	0	0	-1
1	1	1	1	0

Czyli

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1).$$

Definicja.

$k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

Liczba a jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W $\iff$ (1) $(x - a)^k | W$; (2) $(x - a)^{k+1} \nmid W$.

Twierdzenie Każdy wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ o współczynnikach rzeczywistych da się w sposób jednoznaczny przedstawić w tzw. postaci iloczynowej:

$$W(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_p)^{k_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_sx + c_s)^{l_s},$$

gdzie $x_1, \dots, x_p$ są pierwiastkami wielomianu W o krotnościach $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$, a wielomiany stopnia drugiego w tym iloczynie są nierozkładalne tzn. $\Delta_1 = b_1^2 - 4c_1 < 0, \dots, \Delta_s = b_s^2 - 4c_s < 0$, $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}$.

UWAGA:

(Rysowanie wykresów wielomianów)

Aby naszkicować wykres wielomianu W najpierw przedstawimy go w postaci iloczynowej i zaznaczymy na osi Ox wszystkie jego pierwiastki. Zaczynamy rysować od prawej strony. Jeśli $a_n > 0$ zaczynamy wykres od $+\infty$, a gdy $a_n < 0$ – od $-\infty$. Prowadzimy krzywą do największego pierwiastka. Jeśli jego krotność jest nieparzysta – przecinamy w tym punkcie wykresem oś Ox , a jeśli parzysta ”odbijamy” wykres nie przecinając osi Ox . Przeprowadzamy krzywą do kolejnych pierwiastków, w których postępujemy analogicznie jak przy pierwiastku największym.

Twierdzenie (Pierwiastki wymierne wielomianów)

Niech $W(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych $a_0, \dots, a_n$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, jest pierwiastkiem wielomianu W , wtedy $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Przykład 39 $W(x) = 4x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 21x - 9$.

$$n = 4,$$

$$a_n = 4, \quad a_0 = -9.$$

$$p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}, q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}\} =: K$$

mamy więc 18 kandydatów na pierwiastek wymierny W .

$$W(\frac{3}{2}) = 4 \cdot \frac{81}{16} - 8 \cdot \frac{27}{8} - 7 \cdot \frac{9}{4} + 21 \cdot \frac{3}{2} - 9 = 0 \quad \text{i} \quad W(x) \neq 0 \quad \forall x \in K \setminus \{\frac{3}{2}\}$$

	4	-8	-7	21	-9
$\frac{3}{2}$	4	-2	-10	6	0
$\frac{3}{2}$	4	4	-4	0	

$$\text{Zatem } W(x) = (x - \frac{3}{2})^2(4x^2 + 4x - 4) = 4(x - \frac{3}{2})^2(x^2 + x - 1).$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

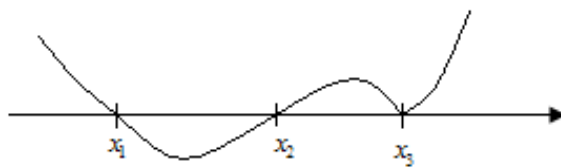
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = x_4 = \frac{3}{2}, \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

Rysujemy wykres W :

Twierdzenie Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków (licząc z krotnościami).

OBSERWACJA

Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.



(3) FUNKCJE WYMIERNE

Definicja.

Funkcję wymierną nazywamy funkcję postaci $Q(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$ gdzie L i M są wielomianami, $M \neq 0$.

UWAGA:

Każda funkcja wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów (funkcji elementarnych), a zatem jest funkcją elementarną.

Definicja.

Funkcję wymierną $Q(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$ nazywamy właściwą gdy $\deg L < \deg M$.

Przykład 40 Każdy wielomian jest funkcją wymierną:

$Q_1(x) = \frac{1}{x}$ jest funkcją wymierną właściwą.

$Q_2(x) = \frac{x^4+1}{x^4-1}$ jest funkcją wymierną.

Twierdzenie Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Dowód:

$Q(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$. Jeśli $\deg L < \deg M$, to Q jest właściwa i teza jest spełniona. Jeśli natomiast $\deg L \geq \deg M$, to istnieją wielomiany P i R takie że:

$$L(x) = P(x) \cdot M(x) + R(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ i } \deg R < \deg M.$$

$$\text{Zatem } Q(x) = \frac{P(x) \cdot M(x) + R(x)}{M(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{M(x)}.$$

■

$$\text{Przykład 41} \quad \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} \stackrel{\text{Przykład 36}}{=} x+1+\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}.$$

Definicja.

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{A}{(x-a)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a, A \in \mathbb{R}$ nazywamy ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

Definicja.

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $p, q, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $\Delta = p^2 - 4q < 0$, nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

Twierdzenie (Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste)

Każdą funkcję wymierną właściwą postaci:

$$\frac{L(x)}{a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

$$\Delta_1 = p_1^2 - 4q_1 < 0$$

.....

$$\Delta_s = p_s^2 - 4q_s < 0$$

da się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $k_1 + k_2 + \dots + k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$\left(\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right) + \dots + \left(\frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}\right)$$

oraz $l_1 + l_2 + \dots + l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}\right) + \dots + \left(\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \dots + \frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}\right),$$

gdzie $A_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k_i$ oraz $B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq l_s$.

$$\text{Przykład 42} \quad \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{3x^3+x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \stackrel{\text{Tw. o rozkładzie}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Aby wyliczyć współczynniki A,B,C,D mnożymy obie strony równości przez $x^4 - 1$:

$$3x^3 + x^2 + x - 1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

Teraz postępujemy na jeden z dwóch sposobów.

Sposób I:

Wymnożymy wyrażenia po prawej stronie, porządkujemy i porównujemy współczynniki wielomianu po lewej i po prawej stronie równości:

$$3x^3 + x^2 + x - 1 = A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D$$

$$3x^3 + x^2 + x - 1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

Tak otrzymany układ 4 równań liniowych z 4 niewiadomymi

$$\begin{cases} (a) & A+B+C=3 \\ (b) & A-B+D=1 \\ (c) & A+B-C=1 \\ (d) & A-B-D=-1 \end{cases}$$

rozwiązujemy:

$$\begin{cases} (b) - (d) \iff 2D = 2 \iff D = 1 \\ (a) - (c) \iff 2C = 2 \iff C = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 2 \end{cases} \iff A = B = C = D = 1.$$

$$\text{Zatem} \quad \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

$$\text{Przykład 43} \quad \frac{5x^3+21x^2+23x+5}{x^4+5x^3+6x^2-4x-8} \stackrel{1 \text{ jest pierwiastkiem mianownika}}{=} \frac{5x^3+21x^2+23x+5}{(x-1)(x^3+6x^2+12x+8)} \stackrel{-2 \text{ jest pierwiastkiem mianownika}}{=} \frac{5x^3+21x^2+23x+5}{(x-1)(x+2)(x^2+4x+4)} = \frac{5x^3+21x^2+23x+5}{(x-1)(x+2)^3} =$$

	1	5	6	-4	-8
1	1	6	12	8	0

	1	6	12	8
-2	1	4	4	0

Tw.o rozkładzie

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} \quad / \cdot (x-1)(x+2)^3$$

$$5x^3 + 21x^2 + 23x + 5 = A(x+2)^3 + B(x-1)(x+2)^2 + C(x-1)(x+2) + D(x-1)$$

Sposób II:

Wstawiamy do równości kolejne pierwiastki mianownika:

$$x = 1 \implies 5 + 21 + 23 + 5 = A \cdot 3^3 \implies 27A = 54 \implies A = 2$$

$$x = -2 \implies 5 \cdot (-8) + 21 \cdot 4 + 23 \cdot (-2) + 5 = D \cdot (-3) \implies -3D = 3 \implies D = -1$$

$$5x^3 + 21x^2 + 23x + 5 = 2(x+2)^3 + B(x-1)(x+2)^2 + C(x-1)(x+2) - x + 1.$$

Teraz porównujemy współczynniki przy najwyższej potędze i wyrazy wolne:

$$5 = 2 + B \implies B = 3, \quad 5 = 16 - 4B - 2C + 1 \implies 2C = 16 - 12 + 1 - 5 \implies 2C = 0 \implies C = 0.$$

$$\text{Zatem } \frac{5x^3+21x^2+23x+5}{x^4+5x^3+6x^2-4x-8} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^3}.$$

$$\textbf{Przykład 44} \quad \frac{2x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{2x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1} = \frac{2x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2} = \frac{2x^3-x^2-x-2}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{\text{Tw. o rozkładzie}}{\stackrel{\downarrow}{=}}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} \quad / \cdot (x^2+x+1)^2$$

$$2x^3 - x^2 - x - 2 = (Ax+B)(x^2+x+1) + Cx + D.$$

Można zastosować tylko sposób I:

$$2x^3 - x^2 - x - 2 = Ax^3 + (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (B+D)$$

$$\begin{cases} A = 2 & A = 2 \\ A + B = -1 & B = -3 \\ A + B + C = -1 & C = 0 \\ B + D = -2 & D = 1 \end{cases}$$

$$\text{Zatem } \frac{2x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{2x-3}{x^2+x+1} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

(4) FUNKCJE HIPERBOLICZNE**Definicja.**

Funkcja sinus hiperboliczny określona jest wzorem $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definicja.

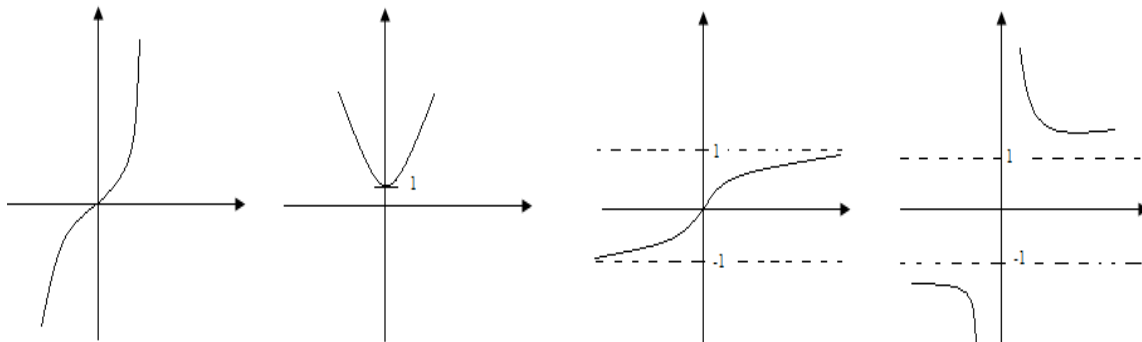
Funkcja kosinus hiperboliczny określona jest wzorem $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definicja.

Funkcja tangens hiperboliczny określona jest wzorem $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definicja.

Funkcja kotangens hiperboliczny określona jest wzorem $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



$$y = \sinh x$$

$$y = \cosh x$$

$$y = \tanh x$$

$$y = \coth x.$$

UWAGA:

Funkcje sinus i kosinus hiperboliczny jako połowa różnicy lub sumy dwóch funkcji wykładniczych są funkcjami elementarnymi. Funkcje tangens i kotangens hiperboliczny jako ilorazy dwóch funkcji elementarnych są funkcjami elementarnymi.

OBSERWACJA

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4 CIĄGI

Definicja.

Ciągiem nazywamy dowolną funkcję a określoną na zbiorze liczb naturalnych. Jego wartość dla argumentu $n \in \mathbb{N}$ nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy a_n (zamiast $a(n)$), a cały ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definicja.

Ciągiem liczbowym nazywamy dowolny ciąg o wartości w $\mathbb{R}$.

Od tej pory przez cały I semestr będziemy się zajmować wyłącznie ciągami liczbowymi.

Definicja.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy ograniczonym jeżeli $\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n \leq M$.

Definicja.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy rosnącym, jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$.

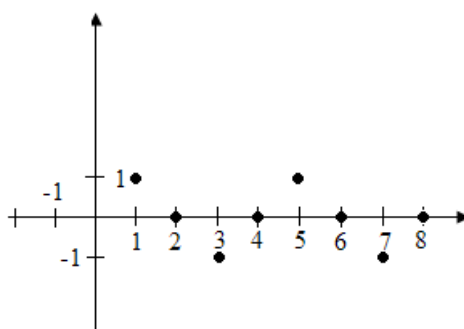
Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy malejącym, jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1}$.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy nierosnącym, jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_{n+1}$.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy niemalejącym jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}$.

Ciąg rosnący lub malejący nazywamy ciągami silnie monotonicznymi, a niemalejący lub nierosnący ciągami słabo monotonicznymi.

Przykład 45 Ciąg $a_n := \sin(n\frac{\pi}{2})$ jest ograniczony ($\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq a_n \leq 1$) ale nie jest monotoniczny.

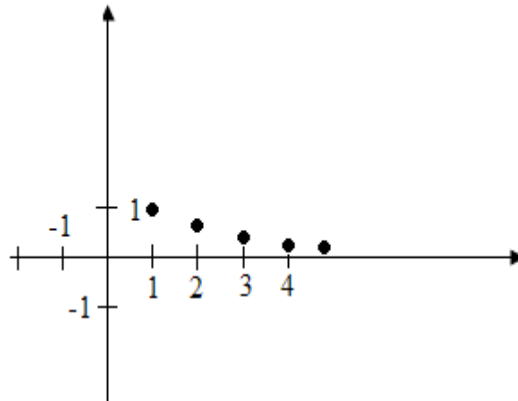


Rysunek 1: $a_n := \sin(n\frac{\pi}{2})$

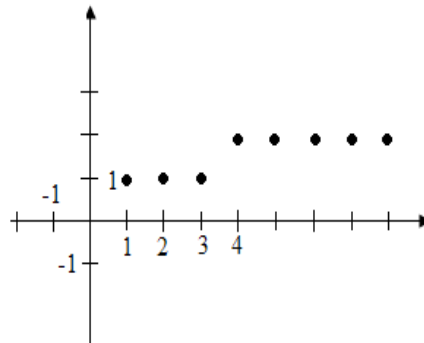
Przykład 46 Ciąg $a_n := (\frac{1}{n})$ jest ograniczony ($\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq 1$) i malejący ($\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$).

Przykład 47 Ciąg $a_n := [\sqrt{n}]$ jest nieograniczony ($\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n > M$) i słabo rosnący ($[\sqrt{n}] \leq [\sqrt{n+1}]$).

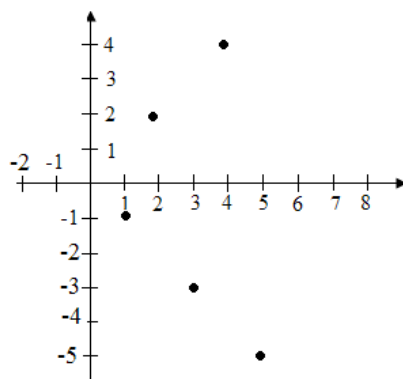
Przykład 48 Ciąg $a_n := (-1)^n \cdot n$ jest nieograniczony ($\forall m, M \in \mathbb{R} \quad \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_1} < m, a_{n_2} > M$) i nie jest monotoniczny.



Rysunek 2: $a_n = \frac{1}{n}$



Rysunek 3: $a_n := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$



Rysunek 4: $a_n := (-1)^n \cdot n$

UWAGA:

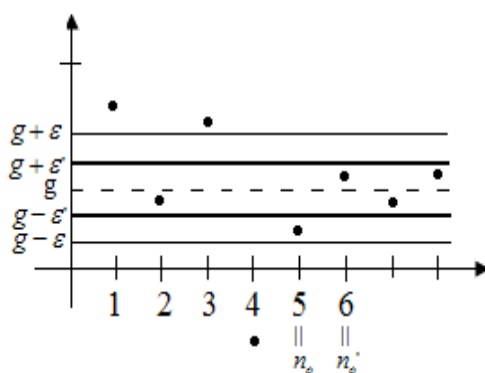
Będziemy używać zwrotu „prawie wszystkie wyrazy ciągu”, który formalnie oznacza wszystkie wyrazy poza skończoną ich liczbą, ale my, bez straty ogólności, będziemy pod tym pojęciem rozumieć wszystkie wyrazy począwszy do pewnego wyrazu a_{n_0} tzn. $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2} \dots)$

Definicja.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do liczby $g \in \mathbb{R}$ (zbiega do liczby g , ma granicę g), jeżeli $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

UWAGA:

Warunek z definicji oznacza, że dowolnie blisko liczby g (granicy) znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bowiem $|a_n - g| < \varepsilon \iff a_n \in (g - \varepsilon; g + \varepsilon)$



Rysunek 5:

Przykład 49 Korzystając z definicji granicy pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-4n}{3+2n} = -2$.

Dowód:

Weźmy $\varepsilon > 0$, $g = -2$, $a_n = \frac{3-4n}{3+2n}$.

$$|a_n - g| < \varepsilon \iff \left| \frac{3-4n}{3+2n} + 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{3-4n+6+4n}{3+2n} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{9}{3+2n} \right| < \varepsilon \xrightarrow{\frac{9}{3+2n} > 0} \frac{9}{3+2n} < \varepsilon \iff$$

$$3+2n > \frac{9}{\varepsilon} \iff 2n > \frac{9}{\varepsilon} - 3 \iff n > \frac{9}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$$

Przyjmijmy $n_0 := \left\lceil \frac{9}{2\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$. Teraz $n \geq n_0 \implies n > \frac{9}{2\varepsilon} - \frac{3}{2} \implies |a_n - g| < \varepsilon$.

■

Definicja.

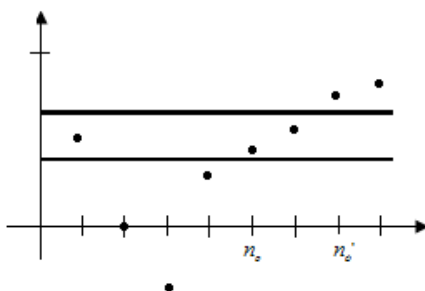
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $+\infty$ (zbiega do $+\infty$, ma granicę niewłaściwą $+\infty$), jeżeli $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M$.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $-\infty$ (zmierza do $-\infty$, ma granice niewłaściwą $-\infty$), jeżeli $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M$.

Piszemy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$

UWAGA:

Warunek z definicji oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu przekraczają (nie przekraczają) dowolnie dużą liczbę (dowolnie małą liczbę).



Rysunek 6:

Przykład 50 Korzystając z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{0,5}(2n-1) = -\infty$.

Dowód:

Weźmy $M < 0$ (jeśli dla niego nierówność będzie spełniona, to tym bardziej dla $M \geq 0$).

$$a_n = \log_{0,5}(2n-1)$$

$$a_n \leq M \iff \log_{0,5}(2n-1) \leq \log_{0,5} 0,5^M \quad \begin{array}{c} \text{log o podstawie } \in (0,1) \text{ malejący} \\ \downarrow \end{array} \iff 2n-1 \geq 2^{-M} \iff 2n \geq 2^{-M} + 1 \iff n \geq 2^{-M-1} + \frac{1}{2}$$

Przyjmijmy $n_0 := [2^{-M-1} + \frac{3}{2}] \in \mathbb{N}$. Teraz $n \geq n_0 \implies n \geq 2^{-M-1} + \frac{1}{2} \implies a_n \leq M$. ■

Definicja.

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem oraz niech $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Ciąg $b_n := a_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nazywamy podciągiem ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

UWAGA:

Intuicyjnie, podciąg powstaje z ciągu przez skreślenie pewnej (skończonej lub nieskończonej) liczby wyrazów w ten sposób jednak, by pozostało w nim ich dalej nieskończenie wiele.

Przykład 51 Ciąg $b_n := a_{n+999} = \sqrt{n+999}$ jest podciągiem ciągu $a_n = \sqrt{n}$ powstałym przez wykreślenie zeń pierwszych 999 wyrazów.

Przykład 52 Ciąg $b_n := a_{2n-1} = 2n - 1$ liczb nieparzystych jest podciągiem ciągu $a_n = n$ liczb naturalnych powstałym przez wykreślenie zeń co drugiego wyrazu (wszystkich wyrazów parzystych).

Twierdzenie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = g$ dla każdego podciągu $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Twierdzenie Ciąg zbieżny nie może mieć dwu różnych granic, tzn. ciąg albo nie ma granicy, albo ma ją dokładnie jedną.

Przykład 53 Ciąg $a_n := (-1)^n$ nie ma granicy, możemy bowiem wybrać dwa jego różne podciągi zbieżne do różnych granic:

$$b_n = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

$$c_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Przykład 54 Ciąg $a_n = \sin n$ również nie ma granicy. Dla każdego $g \in \langle -1; 1 \rangle$ możemy wybrać podciąg ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do g .

Twierdzenie

$$\left. \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M \text{ (ciąg jest ograniczony od góry przez } M) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q \quad \text{(ciąg jest zbieżny do liczby } q) \end{array} \right\} \Rightarrow q \leq M.$$

Twierdzenie Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

UWAGA:

Nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny - patrz przykład 53.

Twierdzenie Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie (Granice niektórych ciągów:)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e, \quad \forall \text{ ciągu } a_n \rightarrow 0, \quad \text{gdzie } a_n \neq 0 \text{ dla prawie wszystkich wyrazów ciągu.}$

Twierdzenie Twierdzenie o trzech ciągach:

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami takimi, że:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \in \mathbb{R}$

Wtedy ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ też jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

OZNACZENIE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0^+ \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ i } a_n > 0 \text{ dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0^- \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ i } a_n < 0 \text{ dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie o działaniach na granicach ciągów:

+	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

-	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a - b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

.	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$a > 0$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

:	$-\infty$	$b < 0$	0^-	0	0^+	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	?
$a < 0$	0	$\frac{a}{b}$	$+\infty$	?	$-\infty$	$\frac{a}{b}$	0
0	0	0	?	?	?	0	0
$a > 0$	0	$\frac{a}{b}$	$-\infty$	?	$+\infty$	$\frac{a}{b}$	0
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	?

$\wedge$	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0
$a \in (0, 1)$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0
1	?	1	1	1	?
$a \in (1; +\infty)$	0	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$

UWAGA:

- Każda kratka w każdej z tabelok oznacza inne twierdzenie zapisane w formie skróconej.
Np. $(a < 0) \cdot (+\infty) = -\infty$ w pełnej formie brzmi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \quad a < 0.$$

Wtedy iloczyn ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę niewłaściwą $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.

Inny przykład: $(a > 0) : (0^+) = +\infty$ oznacza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$a > 0 \quad b_n > 0$ dla prawie wszystkich n

Wtedy iloraz ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę niewłaściwą $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

2. ? w kratce oznacza tzw. symbol nieoznaczony, czyli nie jesteśmy w stanie określić granicy ciągu "wyjściowego" na podstawie informacji o granicach ciągów "wejściowych". Innym słowy granica ta czasami może nie istnieć, a czasami istnieć ale przyjmować różne wartości.

Przykład 55 $\frac{+\infty}{0} = ?$ oznacza, że z faktu, iż $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ nie jesteśmy w stanie wysnuć żadnych wniosków o granicy ilorazu ciągów $\frac{a_n}{b_n}$.

Weźmy np. $a_n := n$, $b_n := \frac{1}{n}$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Ale gdy weźmiemy $a_n := n$, $b_n := -\frac{1}{n}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 = -\infty$.

Z kolei, gdy weźmiemy $a_n = n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ z twierdzenia o trzech ciągach, bowiem $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Tymczasem $c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{n^2}{(-1)^n}$

ciąg ten nie ma granicy, bo

$$c_{2n} = n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

$$c_{2n+1} = -n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

Przykład 56 $1^{+\infty} = ?$

Weźmy $a_n = 1$, $b_n = n$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Ale dla $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = n$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 1$.

SYMBOLE NIEOZNACZONE, z którymi najczęściej będziemy się spotykać to:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

UWAGA:

Liczenie granic ciągów z definicji jest żmudne i w wielu przypadkach niewykonalne tym bardziej, że z definicji możemy jedynie sprawdzić czy dana liczba lub $\pm\infty$ jest granicą czy nie. Ale jak tę granicę znaleźć? Stosujemy rozmaite techniki w zależności od typu ciągu. Nie ma więc jednego algorytmu. Pierwsza rzecz, którą należy jednak zawsze zrobić, to sprawdzić czy mamy do czynienia z symbolem oznaczonym, czy nieoznaczonym. Potrzebna jest też znajomość własności funkcji elementarnych.

Przykład 57 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - \frac{1}{n+1} \stackrel{\text{Tw. o granicy różnicy}}{\underset{\downarrow}{=}} 1 - 0 = 1.$

Przykład 58 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7}{13 - 2n^2} = \left[\frac{+\infty}{-\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{7}{n^2}}{\frac{13}{n^2} - 2} = -\frac{3}{2}.$

Przykład 59 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 3^{-n} = [+\infty \cdot 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

Przykład 60 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 + 2^n} = 2$, bo

$$\overset{2}{\uparrow} 2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 + 2^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 2^n + 2^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \overset{2}{\uparrow} 2$$

i korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

Przykład 61

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\overset{0}{\uparrow} 1}{n} = \cos 0 = 1.$$

Przykład 62 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n-2}\right)^{3n} = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-2+2+3}{4n-2}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{4n-2}\right)^{3n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{4n-2}\right)^{\frac{4n-2}{5} \cdot \frac{5}{4n-2} \cdot 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{4n-2}\right)^{\frac{4n-2}{5}}\right]^{\frac{15n}{4n-2}} = e^{\frac{15}{4}}.$

W więcej przykładów na ćwiczeniach.

Twierdzenie (o 2 ciągach)

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami takimi, że:

1. $a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$

Wtedy ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę niewłaściwą i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$

UWAGA:

Analogiczne stwierdzenie można sformułować dla $-\infty.$

Przykład 63 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^3 - 4n - 2) = +\infty$, bo dla $n \geq 3$

$$\overset{+\infty}{\uparrow} 2n^3 \leq 3n^3 - 4n - 2.$$

Definicja.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy arytmetycznym, jeżeli $\exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n + r$.

Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

OBSERWACJA

$\forall$ ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Definicja.

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy geometrycznym, jeżeli $\exists q \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

OBSERWACJA

$\forall$ ciągu geometrycznego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

$$S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q}, \text{ gdy } |q| < 1.$$

OBSERWACJA

$|q| < 1 \implies$ ciąg geometryczny $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$,

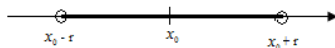
$q > 1 \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zmierza do $+\infty$ gdy $a_1 > 0$ lub do $-\infty$ gdy $a_1 < 0$.

$q = 1 \implies$ ciąg geometryczny $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a_1$, $q \leq -1 \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie ma granicy.

5 GRANICA FUNKCJI

Definicja.

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy przedział otwarty $V(x_0) = (x_0 - r; x_0 + r)$.

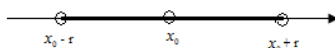


Rysunek 1: Otoczenie punktu

Definicja.

Sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) = V(x_0, r) \setminus \{x_0\} = (x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r).$$



Rysunek 2: Sąsiedztwo punktu

Definicja.

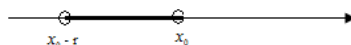
Sąsiedztwem prawostronnym punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$S^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r).$$

Definicja.

Sąsiedztwem lewostronnym punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$S^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0).$$



Rysunek 3: Sąsiedztwo lewostronne punktu

Definicja.

Sąsiedztwem $+\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci $S(a; +\infty) = (a; +\infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Definicja.

Sąsiedztwem $-\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci $S(a; -\infty) = (-\infty; a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad g \in \mathbb{R}.$$

Definicja.

Założmy, że $\exists r > 0 \quad S(x_0, r) \subset D_f$.

Mówimy, że funkcja f zmierza w punkcie x_0 do $\left| \begin{array}{c} g \\ +\infty \\ -\infty \end{array} \right|$, co oznaczamy

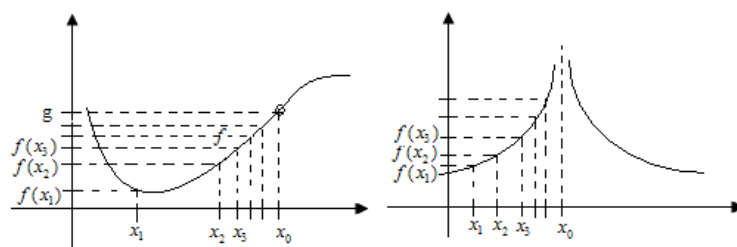
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left| \begin{array}{c} g \\ +\infty \\ -\infty \end{array} \right|$$

$$\text{albo } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \left| \begin{array}{c} g \\ +\infty \\ -\infty \end{array} \right| \text{ jeżeli}$$

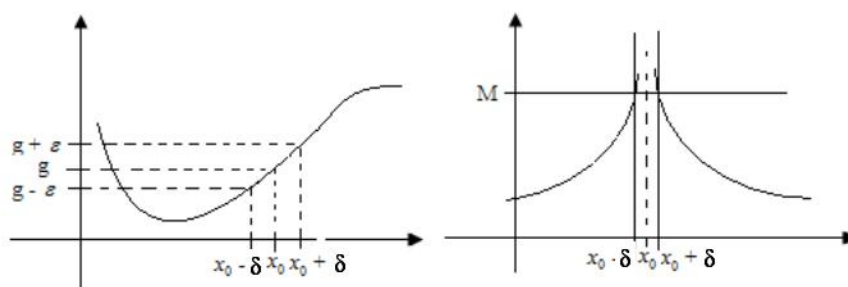
(DEFINICJA HEINEGO)

$$\forall \text{ ciągu } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(x_0, r) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \left| \begin{array}{c} g \\ +\infty \\ -\infty \end{array} \right|.$$

$$\text{(DEFINICJA CAUCHY'EGO)} \quad \left| \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \\ \forall M \in \mathbb{R} \\ \forall M \in \mathbb{R} \end{array} \right| \exists \delta > 0 \quad x \in S(x_0, \delta) \implies f(x) \in \left| \begin{array}{c} V(g, \varepsilon) \\ S(M, +\infty) \\ S(M, -\infty) \end{array} \right|.$$



Rysunek 4: Definicja Heinego



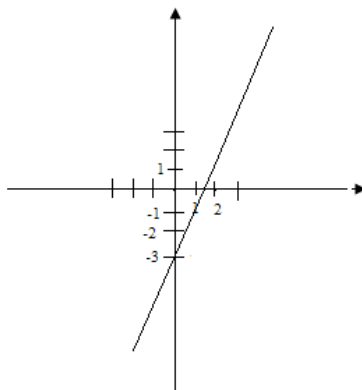
Rysunek 5: Definicja Cauchy'ego

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Przykład 64 $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1$.



Rysunek 1:

Uzasadnienie (wg def. Heinego):

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do 1.

Oczywiście $(x_n) \subset \mathbb{R} = D_f$.

Teraz ciąg $f(x_n) = 2x_n - 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ na mocy twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągu.

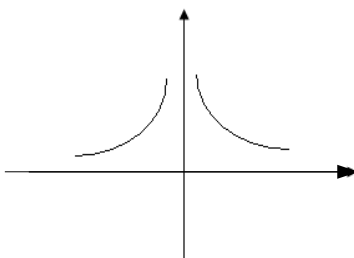
Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego)

Weźmy $\varepsilon > 0$.

$$f(x) \in V(-1, \varepsilon) \iff f(x) \in (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon) \iff -1 - \varepsilon < 2x - 3 < -1 + \varepsilon \iff 2 - \varepsilon < 2x < 2 + \varepsilon \iff 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem dla $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ mamy implikację $x \in S(1, \delta) \implies f(x) \in V(-1, \varepsilon)$.

Przykład 65 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.



Rysunek 2:

Uzasadnienie (wg definicji Heinego):

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do 0 o wyrazach niezerowych (wtedy $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = D_f$).

Teraz ciąg $f(x_n) = \frac{1}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ na mocy tw. o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów, bo

$$\frac{1}{0^2} = +\infty.$$

Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego):

Weźmy $M \in \mathbb{R}$. Możemy założyć, że $M > 0$.

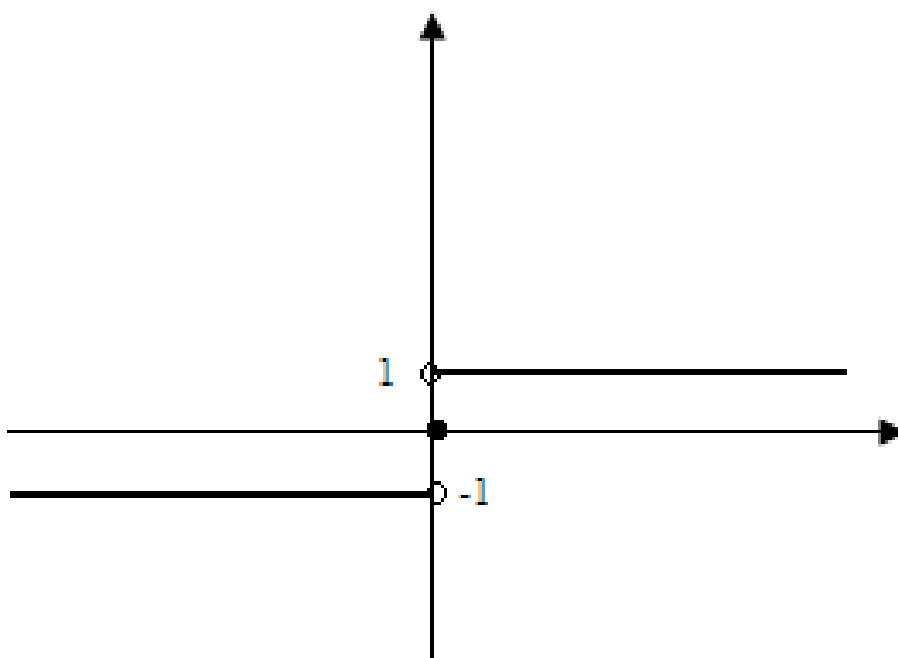
$$f(x) \in S(M, +\infty) \iff f(x) > M \iff \frac{1}{x^2} > M (M > 0) \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Zatem dla $\delta := \frac{1}{\sqrt{M}}$ mamy implikację: $x \in S(0, \delta) \implies f(x) \in S(M, +\infty)$.

Przykład 66 Rozważmy funkcje signum (funkcja znaku) określoną wzorem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ nie istnieje.



Rysunek 3:

Uzasadnienie (wg def. Heinego)

Weźmy ciągi $x_n := \frac{1}{n}$ oraz $\widetilde{x}_n := -\frac{1}{n}$. Oba te ciągi zbiegają do 0, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\widetilde{x}_n).$$

Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego)

Weźmy $\varepsilon := \frac{1}{3}$.

Żadna liczba $g \in \mathbb{R}$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$$x \in S(0, \delta) \implies f(x) \in \{-1, 1\} \not\subset V(g, \varepsilon).$$

Weźmy $M := 2$.

$+\infty$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$$x \in S(0, \delta) \implies f(x) \in \{-1, 1\} \not\subset S(M, +\infty).$$

Weźmy $M := -2$

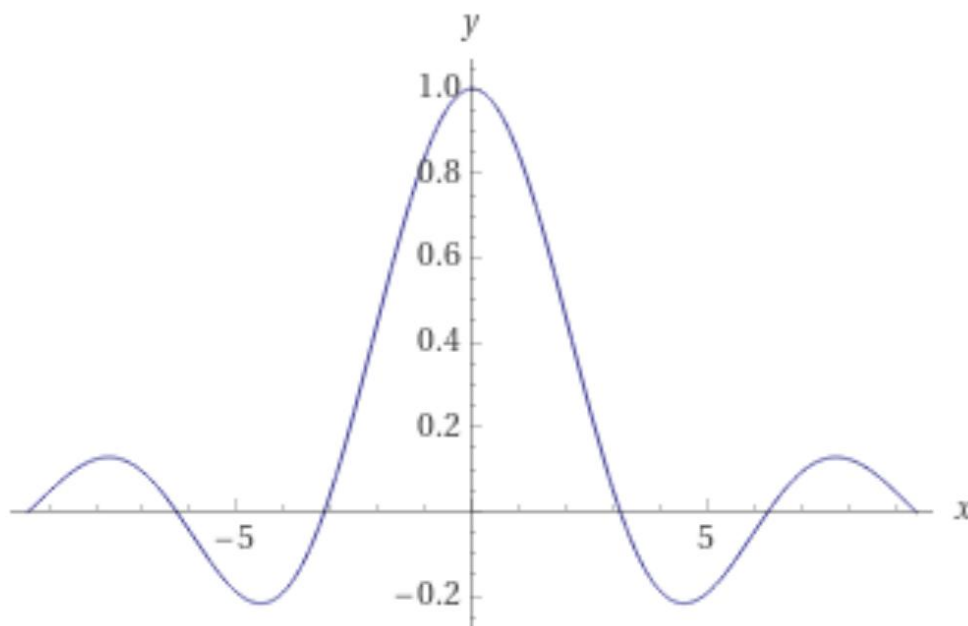
$-\infty$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$x \in S(0, \delta) \implies f(x) \in \{-1, 1\} \not\subset S(M, -\infty)$.

UWAGA:

Funkcja mająca granicę w punkcie nie musi być w tym punkcie określona.

Przykład 67 Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest nieokreślona w 0, ale ma w 0 granicę.



Rysunek 4: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Przykład 68 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$. W szczególności $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Przykład 69 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Ogólniej mamy twierdzenie

Twierdzenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

Definicja.

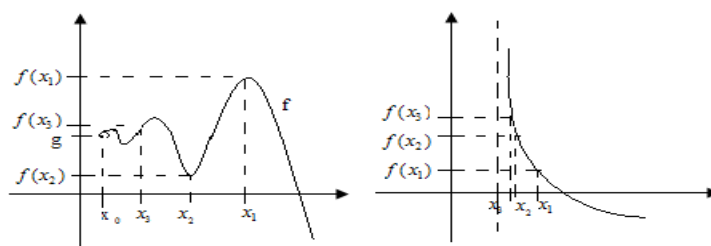
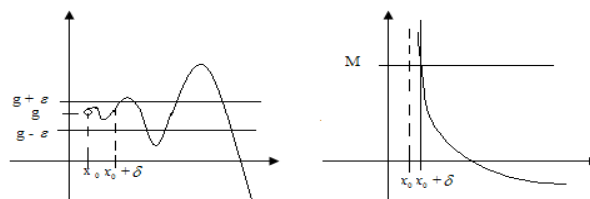
Założmy, że $\exists r > 0 \quad S^+(x_0, r) \subset D_f$.

Mówimy, że $\frac{\text{funkcja } f \text{ zmierza z prawej strony w punkcie } x_0 \text{ do}}{(\text{ma w punkcie } x_0 \text{ granicę prawostronną})} \left| \begin{array}{c} g \\ +\infty \\ -\infty \end{array} \right|$, co oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \begin{cases} g \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \text{albo} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \begin{cases} g \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}, \text{ jeżeli}$$

$$(H) \forall \text{ ciągu } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S^+(x_0, r) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \begin{cases} g \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}.$$

$$(C) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ \forall M \in \mathbb{R} \\ \forall M \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \exists \delta > 0 \quad x \in S^+(x_0, \delta) \implies f(x) \in \begin{cases} V(g, \varepsilon) \\ S(M, +\infty) \\ S(M, -\infty) \end{cases}$$

Rysunek 5: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ Rysunek 6: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

UWAGA:

Analogicznie definiuje się granicę lewostronną funkcji w punkcie (zastępujemy sąsiedztwo prawostronne sąsiedztwem lewostronnym).

OBSERWACJA

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje $\iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ istnieją i są sobie równe.

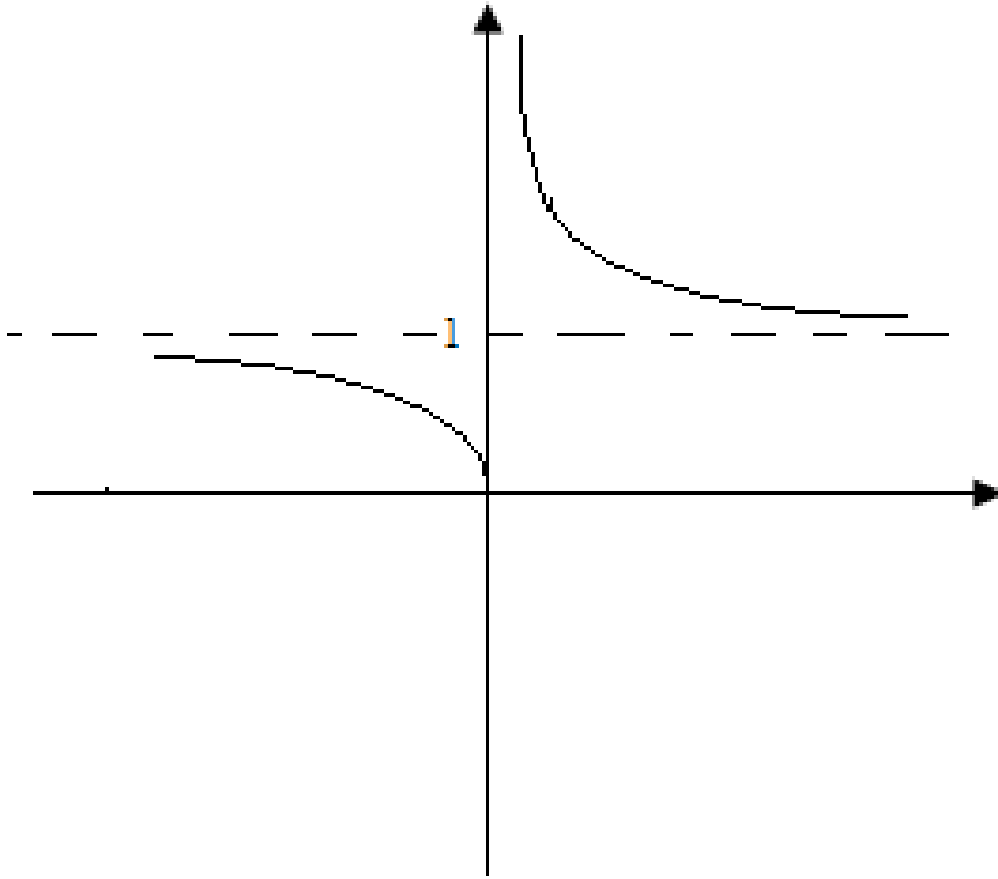
Wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Przykład 70 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} \text{ nie istnieje.}$$

Uzasadnienie (wg def. Heinego):

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach dodatnich, zbieżny do 0.

Rysunek 7: $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

Wtedy $f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ na mocy twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów. ($\frac{1}{0^+} = +\infty, 2^{+\infty} = +\infty$).

Analogicznie, weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach ujemnych zbieżny do 0.

Wtedy $f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ na mocy tego samego twierdzenia ($\frac{1}{0^-} = -\infty, 2^{-\infty} = 0$).

Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego):

Weźmy $M \in \mathbb{R}$. Możemy założyć, że $M > 1$. Ponieważ funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca, to $f(x) \in S(M, +\infty) \iff 2^{\frac{1}{x}} > M \iff 2^{\frac{1}{x}} > 2^{\log_2 M} \iff \frac{1}{x} > \log_2 M \xrightarrow{x>0, \log_2 M>0} x < \frac{1}{\log_2 M}$.

Zatem dla $\delta := \frac{1}{\log_2 M}$ mamy implikację: $x \in S^+(0, \delta) \implies f(x) \in S(M, +\infty)$.

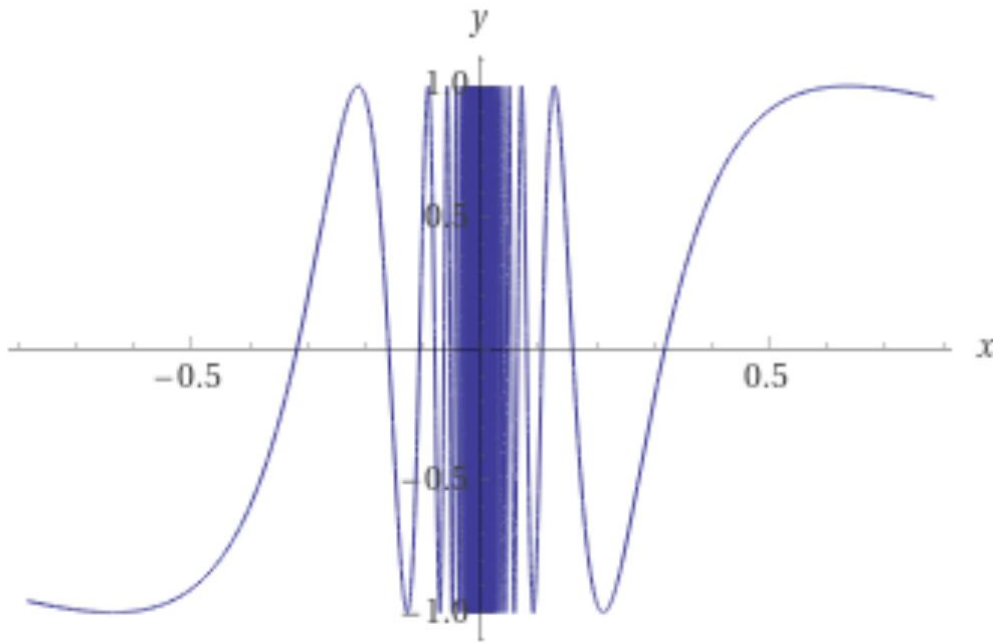
Analogicznie, Weźmy $\varepsilon > 0$. Możemy założyć, że $\varepsilon < 1$.

$f(x) \in V(0, \varepsilon) \iff 2^{\frac{1}{x}} < 2^{\log_2 \varepsilon} \iff \frac{1}{x} < \log_2 \varepsilon \xrightarrow{x<0, \log_2 \varepsilon<0} x > \frac{1}{\log_2 \varepsilon}$.

Zatem dla $\delta := -\frac{1}{\log_2 \varepsilon}$ mamy implikację: $x \in S^-(0, \delta) \implies f(x) \in V(0, \varepsilon)$.

Przykład 71 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Granica $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje.



Rysunek 8: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Uzasadnienie (wg def. Heinego):

Weźmy ciągi $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ oraz $\widetilde{x}_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$. Oba te ciągi są dodatnie i zbiegają do 0, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\widetilde{x}_n).$$

Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego)

Weźmy $\varepsilon := \frac{1}{4}$. Żadna liczba $g \in \mathbb{R}$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$x \in S^+(0, \delta) \implies f(x) \in < -1; 1 > \not\subset V(g, \varepsilon)$.

Weźmy $M := 1$. $+\infty$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$x \in S^+(0, \delta) \implies f(x) \in < -1; 1 > \not\subset S(M, +\infty)$.

Weźmy $M := -1$. $-\infty$ nie może być granicą, bo dla dowolnie małego $\delta > 0$

$x \in S^-(0, \delta) \implies f(x) \in < -1; 1 > \not\subset S(M, -\infty)$.

Analogicznie dowodzi się, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje.

Definicja.

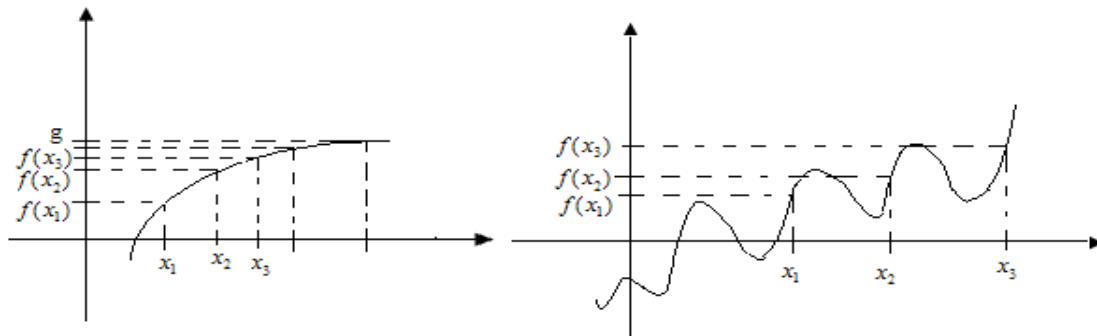
Założmy, że $\exists K > 0 \quad S(K, +\infty) \subset D_f$.

Mówimy, że funkcja f zmierza w $+\infty$ do $\begin{vmatrix} g \\ +\infty \\ -\infty \end{vmatrix}$, co oznaczamy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{vmatrix} g \\ +\infty \\ -\infty \end{vmatrix}$

albo $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{vmatrix} g \\ +\infty \\ -\infty \end{vmatrix}$, jeżeli

(H) $\forall$ ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(K, +\infty) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \begin{vmatrix} g \\ +\infty \\ -\infty \end{vmatrix}$.

(C) $\begin{vmatrix} \forall \varepsilon > 0 \\ \forall M \in \mathbb{R} \\ \forall M \in \mathbb{R} \end{vmatrix} \quad \exists N > K \quad x \in S(N, +\infty) \implies f(x) \in \begin{vmatrix} V(g, \varepsilon) \\ S(M, +\infty) \\ S(M, -\infty) \end{vmatrix}$.



Rysunek 9: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

UWAGA:

Analogicznie definiujemy granice w $-\infty$ ($K < 0$, $S(K, -\infty)$, $N < K$, $S(N, -\infty)$).

Przykład 72 $f(x) = e^{-x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^3} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^3} = +\infty.$$

Uzasadnienie (wg def. Heinego):

Weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $+\infty$.

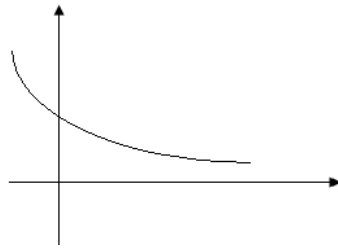
Wtedy $f(x_n) = e^{-x_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ na mocy twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów ($[+\infty^3] = +\infty$, $[e^{+\infty}] = 0$).

Analogicznie, weźmy dowolny ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do $-\infty$.

Wtedy $f(x_n) = e^{-x_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ na mocy tego samego twierdzenia ($[-\infty^3] = -\infty$, $[e^{+\infty}] = +\infty$).

Uzasadnienie (wg def. Cauchy'ego):

Weźmy $\varepsilon > 0$. Można założyć, że $\varepsilon < 1$.

Rysunek 10: $f(x) = e^{-x^3}$

$$f(x) \in V(0, \varepsilon) \iff e^{-x^3} < \varepsilon \iff e^{-x^3} < e^{\ln \varepsilon} \iff -x^3 < \ln \varepsilon \iff x^3 > -\ln \varepsilon \stackrel{\varepsilon < 1 \Rightarrow \ln \varepsilon < 0}{\iff} x > \sqrt[3]{-\ln \varepsilon}.$$

Zatem dla $N := \sqrt[3]{-\ln \varepsilon}$ mamy implikację: $x \in S(N, +\infty) \implies f(x) \in V(0, \varepsilon)$.

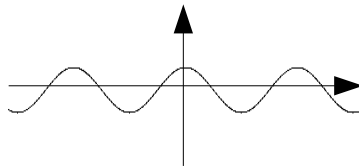
Analogicznie, weźmy $M \in \mathbb{R}$. Możemy założyć, że $M > 1$.

$$f(x) \in S(M, +\infty) \iff e^{-x^3} > e^{\ln M} \iff x^3 < -\ln M \stackrel{M > 1 \Rightarrow \ln M > 0}{\iff} x < -\sqrt[3]{\ln M}.$$

Zatem dla $N := -\sqrt[3]{\ln M}$ mamy implikację: $x \in S(N, -\infty) \implies f(x) \in S(M, +\infty)$.

Przykład 73 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ ani $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ nie istnieją.

Uzasadnienie: na ćwiczeniach.



Rysunek 11:

UWAGA:

Definicje granic Heinego i Cauchy'ego w każdym przypadku są równoważne (bez dowodu).

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji)

Analogicznie jak dla ciągów. Wszystkie twierdzenia są prawdziwe dla granic obustronnych i jednostronnych w punkcie, jak również w $+\infty$ i $-\infty$.

Przykład 74 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \sqrt{x})^{\ln x} = [(2 - 0)^{-\infty}] = [2^{-\infty}] = 0.$

Przykład 75 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + x}{\arctg x} = \left[\frac{4 + (-\infty)}{-\frac{\pi}{2}} \right] = \left[\frac{-\infty}{-\frac{\pi}{2}} \right] = +\infty.$

Przykład 76 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin x}{(x + 2)^2} = \left[\frac{\sin(-2)}{0^+} \right] \stackrel{\sin(-2) < 0}{=} -\infty.$

Przykład 77 $\lim_{x \rightarrow -1^-} x \cdot [x] = -1 \cdot (-2) = 2.$

Twierdzenie (o granicy funkcji złożonej)

Niech f , g i h będą funkcjami spełniającymi warunki :

(1) $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B,$

(2) $f(x) \neq B$ w pewnym sąsiedztwie A ,

(3) $\lim_{y \rightarrow B} g(y) = C.$

Wtedy $\lim_{x \rightarrow A} g(f(x)) = C$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, przy czym granice liczbowe mogą być zarówno obustronne jak i jednostronne.

Przykład 78 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1.$

Przykład 79 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{tg}(\arccos x) = \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right)^+ \right] = -\infty.$

Przykład 80 $\lim_{x \rightarrow 3} e^{\sqrt{\frac{x^2-8}{4}}} = e^{\sqrt{\frac{9-8}{4}}} = e^{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{e}.$

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Niech f i g będą funkcjami spełniającymi warunki :

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in S(A),$

(2) $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} h(x) = a \in \mathbb{R}.$

Wtedy $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = a,$

gdzie $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $S(A)$ oznacza sąsiedztwo A , przy czym granice w punkcie mogą być obustronne jak i jednostronne (wtedy $S(A)$ oznacza odpowiednie obustronne lub jednostronne sąsiedztwo A).

Przykład 81 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, bo $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$.

Przykład 82 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$, bo $-|x| \leq x \cdot \cos \frac{1}{x} \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Twierdzenie (o dwóch funkcjach)

Niech f i g będą funkcjami spełniającymi warunki :

(1) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in S(A)$,

(2) $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$.

Wtedy $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = +\infty$,

gdzie $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $S(A)$ oznacza sąsiedztwo A , przy czym granice w punkcie mogą być obustronne jak i jednostronne (wtedy $S(A)$ oznacza odpowiednie obustronne lub jednostronne sąsiedztwo A).

UWAGA:

Analogiczne twierdzenie można wypowiedzieć dla granicy niewłaściwej równej $-\infty$.

Przykład 83 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$, bo $[x] \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Przykład 84 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sin x} = +\infty$, bo $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sin x} \geq \frac{1}{|x|} \quad \forall x \neq 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Przykład 85 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x - \sqrt{x}) = -\infty$, bo $\cos x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{x} \quad \forall x > 0$
oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{x} = -\infty$.

UWAGA:

W przypadku występowania symboli nieoznaczonych $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , czy ∞^0 stosuje się różne techniki liczenia granic .

Przykład 86 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.

Przykład 87 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4+x}{x^2-5} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{5}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$.

Przykład 88 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \overset{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \overset{1}{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}} \cdot 2 \overset{1}{\cos x} = 2$.

Przykład 89 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1 - (2^x - 1)}{x \cdot \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\overset{\ln 5}{5^x - 1}}{x} - \frac{\overset{\ln 2}{2^x - 1}}{x} \right) \cdot \overset{1}{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}} =$
 $= \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$.

Przykład 90 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3x - 1} \right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 1} \right)^{3x} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-5x + 6}{x^2 + 3x - 1} \right)^{\frac{x^2 + 3x - 1}{-5x + 6} \cdot 3x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-5x + 6}{x^2 + 3x - 1} \right)^{\frac{x^2 + 3x - 1}{-5x + 6}} \right]^{\frac{-15 + \frac{18}{x}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}} = e^{-15}.$

Przykład 91 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x} - 1) \cdot \sqrt[3]{x} = [(+\infty) \cdot (+\infty)] = +\infty.$

Przykład 92 $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x - 4)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)^2(\sqrt{x} + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{(x - 4)^2(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \left[\frac{1}{0^- \cdot 4} \right] = -\infty.$

Przykład 93 $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cdot \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin x} \cdot \cos x = \left| \begin{array}{l} t = \pi - x \\ x \rightarrow \pi \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\sin(\pi - t)} \cdot \cos(\pi - t) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{t}{\sin t} \cdot (-\cos t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\frac{\sin t}{t}} = 1.$

Twierdzenie (o zachowaniu nierówności w granicy)

$$f(x) \leq M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in S(A) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow A} f(x) \leq M,$$

$$f(x) \geq M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in S(A) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow A} f(x) \geq M,$$

gdzie $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $S(A)$ oznacza sąsiedztwo A , przy czym

granice w punkcie mogą być obustronne jak i jednostronne

(wtedy $S(A)$ oznacza odpowiednie obustronne lub jednostronne sąsiedztwo A).

6 CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

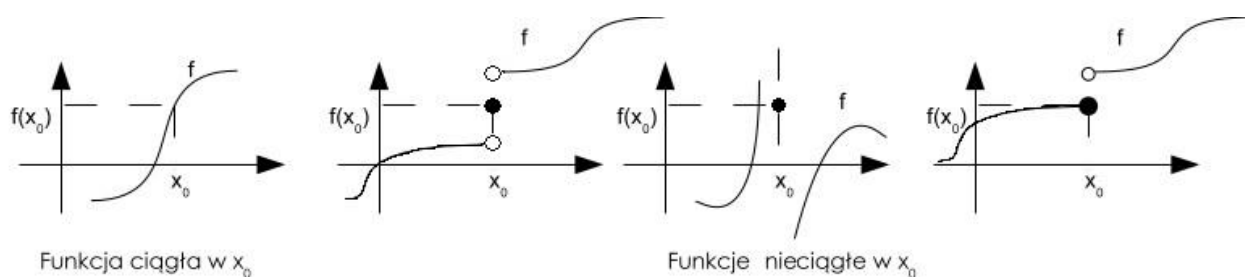
Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 jeżeli :

- (1) f jest określona w punkcie x_0 , tzn. $x_0 \in D_f$,
- (2) f ma granicę w punkcie x_0 ,
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

UWAGA:

Funkcja jest ciągła w punkcie jeśli jej wykres nie "rozrywa się" w tym punkcie.



Rysunek 1: ciągłość obustronna

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\left| \begin{array}{c} \text{prawostronnie} \\ \text{lewostronnie} \end{array} \right|$ ciągła w punkcie x_0 jeżeli :

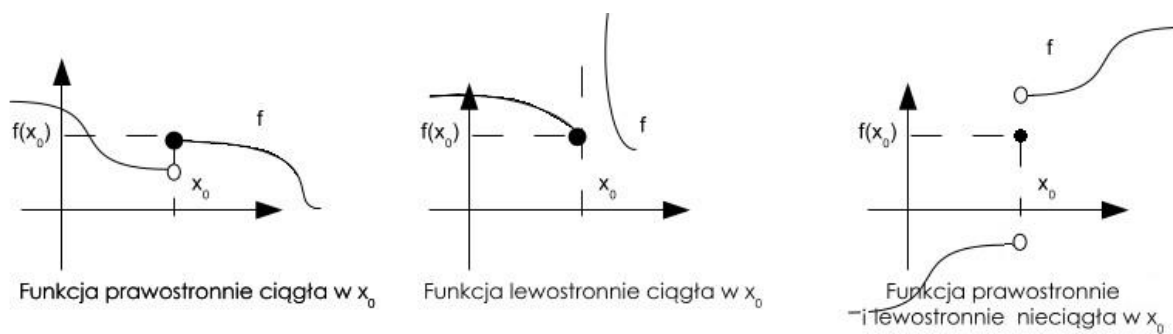
- (1) f jest określona w punkcie x_0 , tzn. $x_0 \in D_f$,
- (2) f ma granicę $\left| \begin{array}{c} \text{prawostronną} \\ \text{lewostronną} \end{array} \right|$ w punkcie x_0 ,
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$.

OBSERWACJA

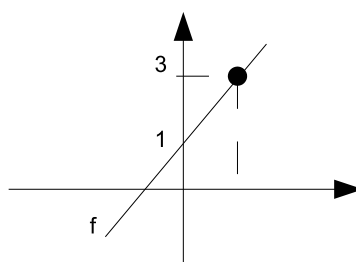
f jest ciągła w $x_0 \Leftrightarrow f$ jest prawostronnie i lewostronnie ciągła w x_0 .

Przykład 94 Funkcja $f(x) = 2x + 1$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$, bo

$$x_0 \in D_f = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3 = f(1).$$

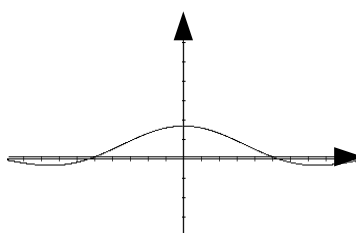


Rysunek 2: ciągłość jednostronna

Rysunek 3: $y = 2x + 1$

Przykład 95 Funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, bo

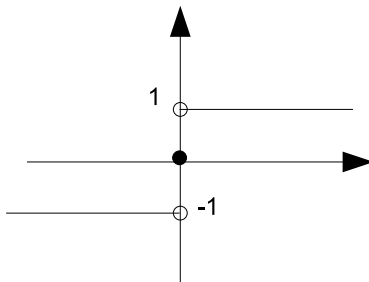
$$x_0 \in D_f = \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$



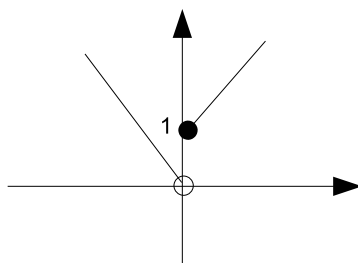
Rysunek 4: Przykład 95

Przykład 96 Funkcja $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ jest nieciągła prawostronnie ani lewostronnie w $x_0 = 0$.

Przykład 97 Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Rysunek 5: $y = \operatorname{sgn} x$

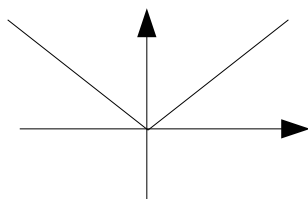
jest ciągła prawostronnie w $x_0 = 0$, bo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 1 = 1 = f(0)$,
 ale nieciągła lewostronnie w $x_0 = 0$, bo $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \neq 1 = f(0)$.



Rysunek 6: Przykład 97

Przykład 98 Funkcja $|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ jest ciągła w $x_0 = 0$, bo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x|.$$

Rysunek 7: $y = |x|$.

Przykład 99 Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ jest nieciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$,
 bo w żadnym punkcie nie ma granicy.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Twierdzenie Wszystkie podstawowe funkcje elementarne są ciągłe.

Twierdzenie Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

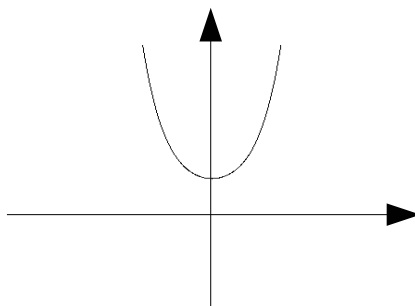
WNIOSEK Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech $f : I \rightarrow J$ będzie silnie monotoniczną suriekcją, I, J - przedziały.

Jeśli f jest funkcją ciągłą, to $f^{-1} : J \rightarrow I$ też jest funkcją ciągłą.

Przykład 100 Funkcja kosinus hiperboliczny $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ zawężona do przedziału $\langle 0, +\infty \rangle$ jest rosnącą suriekcją na przedział $\langle 1, +\infty \rangle$, a więc jest odwracalna. Jako funkcja elementarna jest ona



Rysunek 1: $y = \cosh x$

ciągła.

Zatem funkcja odwrotna arcus kosinus hiperboliczny $\operatorname{arcosh} : \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ jest również funkcją ciągłą. Wyraża się ona wzorem:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x-1} \sqrt{x+1} \right).$$

Twierdzenie (o lokalnym zachowaniu znaku)

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przedziale otwartym $I \subset X$.

Jeśli $x_0 \in I$ i $f(x_0) \neq 0$ to $\exists J \subset I$ przedział otwarty taki, że $x_0 \in J$ i $f(x) \cdot f(x_0) > 0 \quad \forall x \in J$.

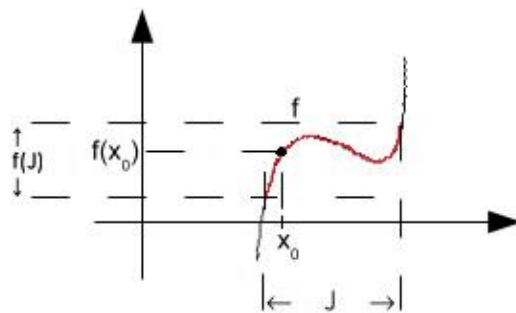
Twierdzenie Weierstrassa (o przyjmowaniu kresów)

$f : \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym przyjmuje na tym przedziale kresy tzn.

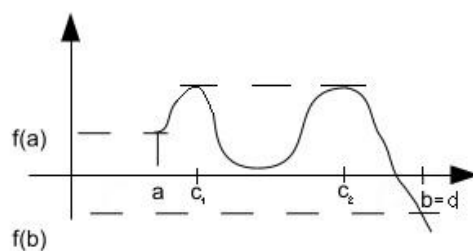
$$\begin{array}{lll} \exists c \in \langle a; b \rangle & \sup_{x \in \langle a; b \rangle} f(x) = f(c) & \text{W szczególności funkcja } f \\ \exists d \in \langle a; b \rangle & \inf_{x \in \langle a; b \rangle} f(x) = f(d) & \text{na przedziale } \langle a; b \rangle \text{ jest ograniczona.} \end{array}$$

UWAGA:

Bez założenia domkniętości lub ograniczoności dziedziny albo ciągłości funkcji teza twierdzenia może nie zachodzić.



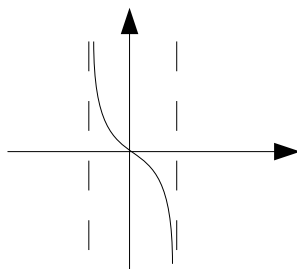
Rysunek 2: Lokalne zachowanie znaku



Rysunek 3: Kresy funkcji

Przykład 101 $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\operatorname{tg} x$

Funkcja ta jest określona na przedziale ograniczonym i jest ciągła, ale nie osiąga kresów.

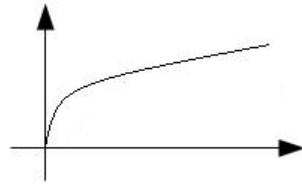
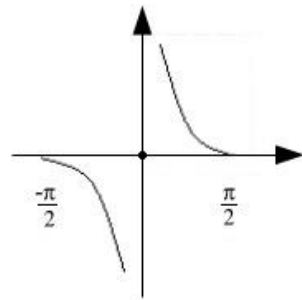
Rysunek 4: $y = -\operatorname{tg} x$

Przykład 102 $f : \langle 0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$

Funkcja ta jest określona na przedziale domkniętym i jest ciągła, ale nie osiąga supremum.

Przykład 103 $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Funkcja jest określona na przedziale domkniętym i ograniczonym, ale nie jest ciągła w 0 i nie osiąga kresów.

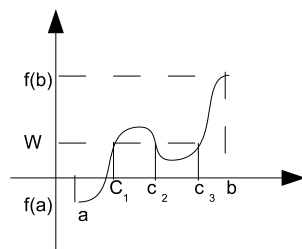
Rysunek 5: $y = \sqrt{x}$ 

Rysunek 6: Przykład 103

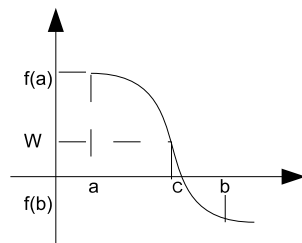
Twierdzenie Darboux (o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\begin{cases} f(a) < f(b) \\ f(b) < f(a) \end{cases}$.

Wtedy $\begin{cases} \forall w \in (f(a), f(b)) \\ \forall w \in (f(b), f(a)) \end{cases} \quad \exists c \in (a, b) : f(c) = w.$



Rysunek 7: Wartości pośrednie



Rysunek 8: Wartości pośrednie

WNIOSEK (Tw.Darboux o miejscach zerowych funkcji)

Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że

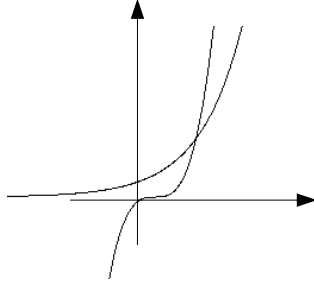
$f(a) \cdot f(b) < 0$ (na końcach przedziału przeciwne znaki). Wtedy $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Przykład 104 Równanie $x^3 = 2^x$ ma rozwiązania $x_1 \in (1, 2)$ oraz $x_2 \in (9, 10)$.

Aby to wykazać, rozpatrzmy funkcję $f(x) = 2^x - x^3$.

Jest to funkcja ciągła, jako różnica podstawowych funkcji elementarnych.

$$x^3 = 2^x \Leftrightarrow f(x) = 0.$$



Rysunek 9: $x^3 = 2^x$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2^1 - 1^3 = 1 > 0 \\ f(2) = 2^2 - 2^3 = -4 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_1 \in (1, 2) : f(x_1) = 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (1, 2) : x_1^3 = 2^{x_1}.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(9) = 2^9 - 9^3 = 512 - 729 = -217 < 0 \\ f(10) = 2^{10} - 10^3 = 24 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_2 \in (9, 10) : f(x_2) = 0 \Rightarrow \exists x_2 \in (9, 10) : x_2^3 = 2^{x_2}.$$

Aby dokładniej zlokalizować np. x_1 dzielimy przedział $(1, 2)$ na pół i badamy znak funkcji w środku przedziału, po czym procedurę powtarzamy, aż osiągniemy zadowalającą nas dokładność:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \sqrt{8} - \frac{27}{8} < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right) : f(x_1) = 0.$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 2^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 2\sqrt[4]{2} - \frac{125}{64} > 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) : f(x_1) = 0.$$

$$f\left(\frac{11}{8}\right) = 2^{\frac{11}{8}} - \left(\frac{11}{8}\right)^3 \simeq 2,594 - 2,6 < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(\frac{5}{4}, \frac{11}{8}\right) : f(x_1) = 0.$$

$$f\left(\frac{21}{16}\right) = 2^{\frac{21}{16}} - \left(\frac{21}{16}\right)^3 \simeq 2,4837 - 2,261 > 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(\frac{21}{16}, \frac{11}{8}\right) : f(x_1) = 0.$$

Możemy więc przyjąć, że $x_1 = \frac{43}{32} \pm \frac{1}{32}$.

7 POCHODNA FUNKCJI

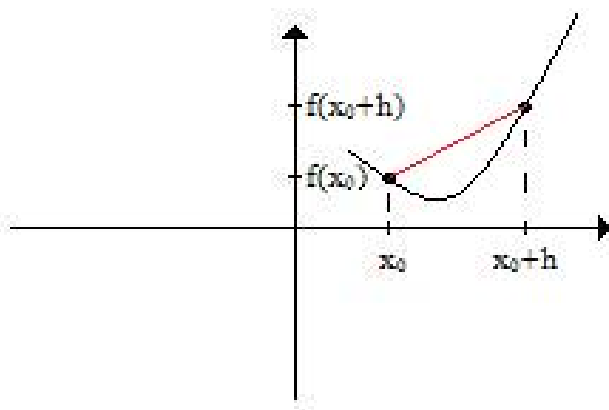
Definicja.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, $x_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $\exists r > 0 \ V(x_0, r) \subset D_f$.

Jeżeli istnieje granica tzw. ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i granicę tę nazywamy po pochodną funkcji



Rysunek 10: Iloraz różnicowy

f w punkcie x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

OZNACZENIE

$$f'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = D_f(x_0).$$

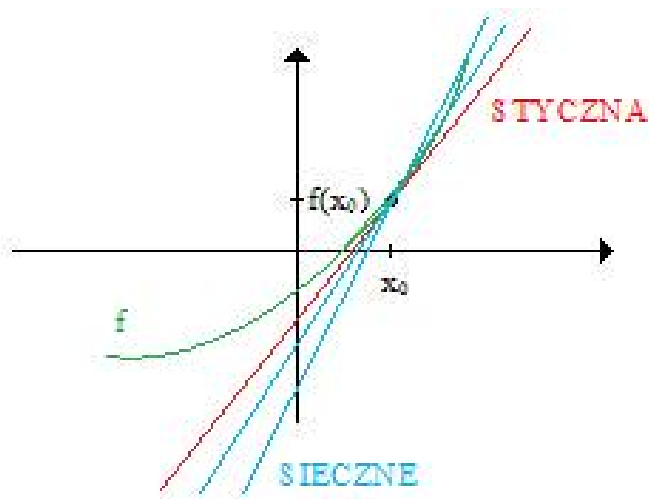
OBSERWACJA

Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ to współczynnik kierunkowy siecznej wykresu funkcji f przecinającej go w punktach $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. W miarę jak h maleje do 0, sieczne coraz lepiej aproksymują tzw. styczną do wykresu f w punkcie x_0 , a więc pochodna $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do f w punkcie x_0 .

Nieformalnie, styczna do wykresu f w punkcie x_0 to prosta najlepiej "przylegająca" do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, zwanym punktem styczności.

OBSERWACJA

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 ma przynajmniej jeden punkt wspólny z tym wykresem i jest nim punkt $(x_0, f(x_0))$. Równanie tej stycznej ma więc postać:



Rysunek 11: Styczna i sieczne

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

gdy $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, natomiast

$$x = x_0,$$

gdy $f'(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$.

Definicja.

Niech f i g będą funkcjami, których wykresy przecinają się w punkcie (x_0, y_0) , różniczkowalnymi w punkcie x_0 . Kątem przecięcia wykresów funkcji f i g nazywamy kąt ostry φ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie ich przecięcia.

OBSERWACJA

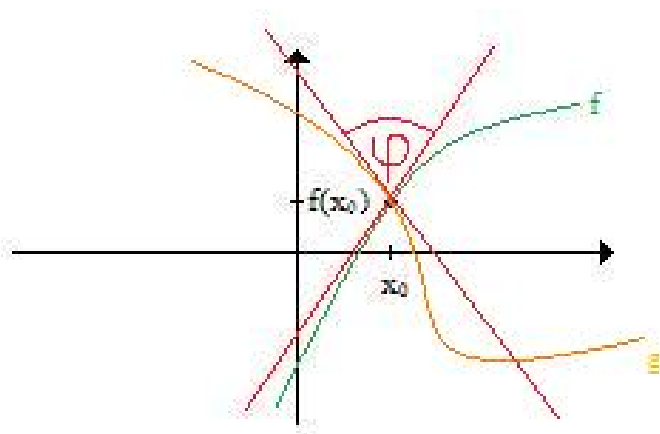
Miara kąta przecięcia wykresów funkcji f i g wyraża się wzorem

$$\varphi = \arctg \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|,$$

jeżeli $f'(x_0)g'(x_0) \neq -1$, natomiast

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

gdy $f'(x_0)g'(x_0) = -1$ lub $f'(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ i $g'(x_0) = 0$, lub $f'(x_0) = 0$ i $g'(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$.



Rysunek 12: Kąt między wykresami funkcji

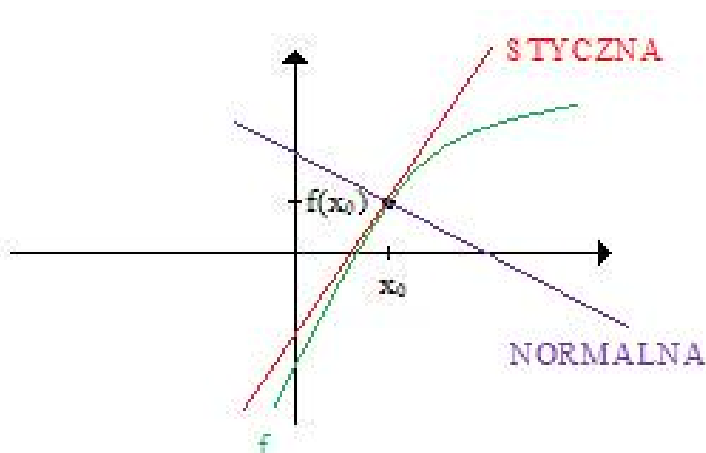
MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Normalną do wykresu f w punkcie x_0 nazywamy prostą prostopadłą do stycznej do wykresu f w punkcie styczności $(x_0, f(x_0))$.



Rysunek 1: Styczna i normalna

OBSERWACJA

Równanie normalnej do wykresu f w punkcie x_0 wyraża się wzorem

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0),$$

jeśli $f'(x_0) \neq 0$ albo

$$x = x_0,$$

jeśli $f'(x_0) = 0$.

Definicja.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, $x_0 \in D_f$. Załóżmy, że

$$\exists r > 0 \left| S^+(x_0, r) \right| \subset D_f.$$

Jeżeli istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow 0^-}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

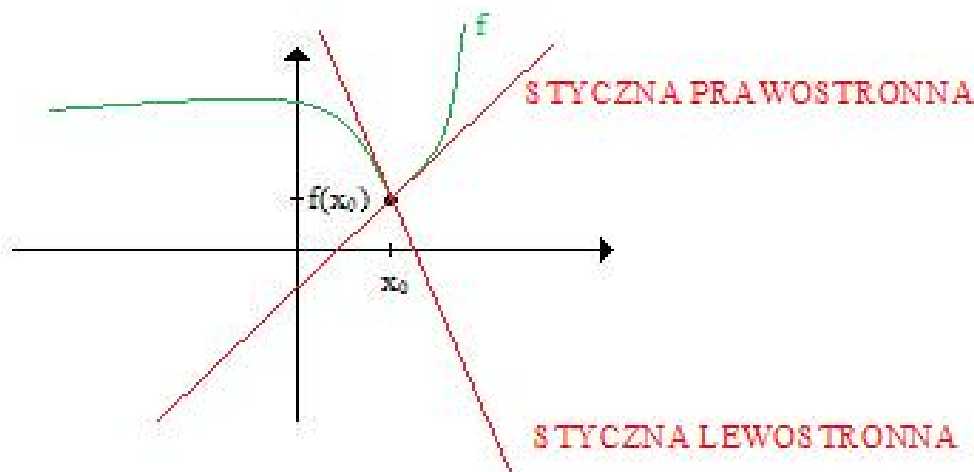
to mówimy, że funkcja f jest prawostronnie (lewostronnie) różniczkowalna w punkcie x_0 i granicę tę nazywamy pochodną prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

UWAGA:

Możemy analogicznie wprowadzić pojęcia stycznej prawostronnej i lewostronnej.



Rysunek 2: Styczne jednostronne

OBSERWACJA

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \Leftrightarrow f$ jest różniczkowalna prawostronnie i lewostronnie w x_0 i $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Przykład 105 $f(x) = 3x - 8$, $x_0 = 3$, $f(x_0) = 3 \cdot 3 - 8 = 1$.

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3+h) - 8 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

Styczna do wykresu f w punkcie $x_0 = 3$ ma więc równanie:

$$y = 3(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 8 \text{ (pokrywa się z wykresem funkcji).}$$

Normalna do wykresu f w punkcie $x_0 = 3$ ma równanie:

$$y = -\frac{1}{3}(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Przykład 106 $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2^1 = 2$.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{1+h} - 2^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{2^h - 1}{h} = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4.$$

Styczna do wykresu f w punkcie $x_0 = 1$ ma więc równanie:

$$y = \ln 4(x - 1) + 2.$$

Normalna do wykresu f w punkcie $x_0 = 1$ ma równanie:

$$y = -\frac{1}{\ln 4}(x - 1) + 2.$$

Przykład 107 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = |0| = 0$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1. \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \\ f'_+(0) &\neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0) \text{ nie istnieje.} \end{aligned}$$

Wykres funkcji f nie ma stycznej w punkcie 0. Ma natomiast styczną prawostronną $y = x$ i styczną lewostronną $y = -x$.

Przykład 108 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = \sqrt{0} = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$\Rightarrow f'_+(0)$ nie istnieje, a styczna prawostronna do wykresu f ma równanie $x = 0$. Oczywiście liczenie $f'_-(0)$ nie ma sensu, bo funkcja f nie jest określona dla $x < 0$.

Przykład 109 Znaleźć miary kątów przecięcia wykresów funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1. \\ f(0) = g(0) &= 0, \quad f(1) = g(1) = 1. \end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^2 - (0)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0, \quad g'_+(0) = +\infty \text{ (patrz przykład 108).}$$

Zatem wykresy f i g przecinają się pod kątem prostym w punkcie $(0, 0)$.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2,$$

$$g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}.$$

Czyli wykresy f i g przecinają się pod kątem o mierze

$$\varphi = \arctg \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \arctg \left| \frac{\frac{3}{2}}{2} \right| = \arctg \frac{3}{4} \simeq 37^\circ \text{ w punkcie } (1, 1).$$

Twierdzenie Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \Rightarrow f$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Dowód:

f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , tzn. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

W takim razie

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Ale } \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

co oznacza ciągłość f w x_0 .

■

UWAGA:

Implikacja w drugą stronę nie musi być prawdziwa. Np. $f(x) = |x|$ jest w 0 ciągła (patrz przykład 98), ale nie różniczkowalna (patrz przykład 107).

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny (na końcach przedziałów określoności wystarcza różniczkowalność jednostronna).

Definicja.

Jeśli funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na zbiorze $I \subset D_f$, to możemy określić pochodną funkcji f jako funkcję $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, przyjmującą w punkcie $x \in I$ wartość $f'(x)$.

Przykład 110 Przypomnijmy kilka pojęć ze szkoły.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{"}n\text{ silnia"},$$

$$0! = 1.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq k \quad \text{"}n \text{ po } k\text{" (Symbol Newtona)}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

(wzór Newtona)

Korzystając ze wzoru Newtona policzymy pochodną funkcji $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} =$$

$$= nx^{n-1} + h \left[\binom{n}{2}x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}h^{n-2} \right] \xrightarrow{h \rightarrow 0} nx^{n-1}.$$

Zatem $f'(x) = nx^{n-1}$.

UWAGA:

Okazuje się, że wzór na pochodną funkcji potęgowej jest również prawdziwy $\forall n \in \mathbb{R}$.

Przykład 111 Przypomnijmy wzór na różnicę sinusów:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Korzystając z tego wzoru policzymy pochodną funkcji $f(x) = \sin x$:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x.$$

Zatem $f'(x) = \cos x$.

Przykład 112 $f(x) = \ln x$.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Zatem $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Twierdzenie (Pochodne podstawowych funkcji elementarnych)

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi	$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
1	0	$(n=0) \ x \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$(n=1) \ x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$(n=-1) \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(n=\frac{1}{2}) \ x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
e^x	e^x	$(a=e)$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(a=e)$			

Twierdzenie (o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu)

Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x_0 , $c \in \mathbb{R}$.

(1)

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

(2)

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(3)

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(4)

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(5)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Dowód:

(5):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h) - \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}f(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)} = \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h)g(x_0)} = \\
&\quad \text{ciągłość i różniczkowalność } f \text{ i } g \quad \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

■

Przykład 113 $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$f'(x) = 2(\cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x.$$

Przykład 114 $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Przykład 115 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3^x + 3x^3$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3^x \ln 3 + 3 \cdot 3x^2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 3^x \ln 3 + 9x^2.$$

Twierdzenie (o pochodnej złożenia)Niech f będzie różniczkowalna w punkcie x_0 , a g – funkcją różniczkowalną w punkcie $f(x_0)$. Wtedy

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&\quad \stackrel{\substack{f(x_0+h)-f(x_0) \rightarrow 0 \\ (\text{z ciągłości } f \text{ w } x_0)}}{=} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).
\end{aligned}$$

■

WNIOSEK

Niech $f_1, \dots, f_k$ będą funkcjami różniczkowalnymi odpowiednio w $x_1, \dots, x_k$,

$$x_2 = f_1(x_1), x_3 = f_2(x_2), \dots, x_k = f_{k-1}(x_{k-1}).$$

Wtedy

$$\left(f_k \circ f_{k-1} \dots \circ f_2 \circ f_1\right)'(x_1) = f'_k(x_k) \cdot f'_{k-1}(x_{k-1}) \cdot \dots \cdot f'_2(x_2) \cdot f'_1(x_1).$$

Dowód:

(indukcyjny ze względu na liczbę składowych funkcji)

I

$$(k=1) \quad L = f'_1(x_1) = P.$$

II

Zakładamy, że tw. prawdziwe dla $n \in \mathbb{N}$, $n < k$, gdzie n – liczba składowych funkcji, tzn.

$$Z_i : \left(f_n \circ \dots \circ f_1\right)'(x_1) = f'_n(x_n) \cdot \dots \cdot f'_1(x_1) \quad (\text{ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE})$$

$$T_i : \left(f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_1\right)'(x_1) = f'_{n+1}(x_{n+1}) \cdot f'_n(x_n) \cdot \dots \cdot f'_1(x_1) \quad (\text{TEZA INDUKCYJNA})$$

$$D_i : L = \left(f_{n+1} \circ (f_n \circ \dots \circ f_1)\right)'(x_1) \stackrel{\text{tw. o pochodnych złożenia}}{=} \dots$$

$$= f'_{n+1}\left((f_n \circ \dots \circ f_1)(x_1)\right) \cdot (f_n \circ \dots \circ f_1)'(x_1) \stackrel{Z_i}{=} f'_{n+1}(x_{n+1}) \cdot f'_n(x_n) \cdot \dots \cdot f'_1(x_1).$$



MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Przykład 116 $h(x) = \sin 2x = (g \circ f)(x)$, gdzie $f(x) = 2x$, $g(y) = \sin y$.
 $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$ (porównaj przykład 113).

Przykład 117 $h(x) = \log(\operatorname{arctg} x) = (g \circ f)(x)$, gdzie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(y) = \log y$.
 $h'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x \cdot \ln 10} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x \cdot \ln 10}$.

Przykład 118 $f(x) = \frac{\arcsin 5x}{\cos^2(1-3x)}$.
 $f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \cdot 5 \cdot \cos^2(1-3x) - \arcsin 5x \cdot 2 \cos(1-3x) \cdot (-\sin(1-3x)) \cdot (-3)}{\cos^4(1-3x)} = \frac{\frac{5 \cos^2(1-3x)}{\sqrt{1-25x^2}} - 3 \arcsin 5x \sin(2-6x)}{\cos^4(1-3x)}$.

Przykład 119 $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$.
 $f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$.

Przykład 120 $f(x) = (\operatorname{tg} 3x)^{\sqrt{x^2+1}} = e^{\ln(\operatorname{tg} 3x) \sqrt{x^2+1}} = e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(\operatorname{tg} 3x)}$.
 $f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(\operatorname{tg} 3x)} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} 3x) + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 \right] =$
 $= (\operatorname{tg} 3x)^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x \ln(\operatorname{tg} 3x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3\sqrt{x^2+1}}{\sin 3x \cos 3x} \right)$.

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że:

- (1) f jest ciągła w pewnym otoczeniu $V(x_0, r)$,
- (2) f jest silnie monotoniczna na $V(x_0, r)$,
- (3) f jest różniczkowalna w punkcie x_0 ,
- (4) $f'(x_0) \neq 0$.

Wtedy $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, gdzie $y_0 = f(x_0)$.

Dowód:

f jest silnie monotoniczna na $V(x_0, r)$, zatem jest w tym otoczeniu odwracalna.

W szczególności $\forall k$ bliskiego 0 $\exists h \neq 0: y_0 + k = f(x_0 + h)$.

Co więcej, $k \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$.

Teraz

$$\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{f^{-1}(f(x_0+h)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{x_0+h-x_0}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Z jednoznaczności granicy funkcji wynika teza. ■

Przykład 121 $g(y) = \arcsin y$.

Jest to funkcja odwrotna do funkcji $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$, która jest silnie rosnąca i różniczkowalna w całej swej dziedzinie, a na przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jej pochodna jest różna od 0.

Zatem $g'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} \stackrel{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$.

Twierdzenie Rolle'a

Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na $\langle a, b \rangle$ taką, że $f(a) = f(b)$.

Wtedy $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Dowód:

f jest ciągła na $\langle a, b \rangle$, więc z tw. Weierstrassa przyjmuje kresy na $\langle a, b \rangle$:

$$\exists c_1 \in \langle a, b \rangle : f(c_1) = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) =: m,$$

$$\exists c_2 \in \langle a, b \rangle : f(c_2) = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) =: M.$$

1° $m = M \Rightarrow f$ jest stała na $\langle a, b \rangle$ i w każdym punkcie jej pochodna jest równa 0.

2° $m < M \Rightarrow$ **2a°** $f(a) = f(b) \neq m \vee$ **2b°** $f(a) = f(b) \neq M$ (oczywiście oba przypadki mogą zajść jednocześnie).

Założmy przypadek **2a°** (w przypadku **2b°** dowód jest analogiczny).

Wtedy $c_1 \in \langle a, b \rangle$, ale $c_1 \notin \{a, b\}$, bo $f(c_1) = m \neq f(a) = f(b)$.

Stąd $c_1 \in (a, b)$ i $\forall x \in \langle a, b \rangle f(x) \geq f(c_1)$, czyli:

$$\frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \leq 0 \text{ dla } h < 0 \text{ oraz } \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \geq 0 \text{ dla } h > 0.$$

Stąd $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} = f'_-(c_1) \leq 0$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} = f'_+(c_1) \geq 0$ z tw. o zachowaniu nierówności w granicy.

Ponieważ f jest różniczkowalna w punkcie c_1 więc $f'_-(c_1) = f'_+(c_1) = 0 = f'(c_1)$.

■

Przykład 122 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & x \in (0; 1) \end{cases}$

jest funkcją różniczkowalną na $(0; 1)$, $f(0) = f(1) = 0$, ale $\forall c \in (0; 1) f'(c) = -1 \neq 0$ (f nieciągła w 0).

Przykład 123 $f(x) = |x| \quad \forall x \in \langle -1; 1 \rangle$.

jest funkcją ciągłą na $\langle -1; 1 \rangle$, $f(-1)=f(1)=1$ ale $\sim \exists c \in (-1, 1) : f'(c) = 0$ (f nie jest różniczkowalna w 0).

Przykład 124 $f(x) = x \quad \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$

jest funkcją ciągłą na $\langle 0; 1 \rangle$, różniczkowalną na $(0; 1)$ ale $\forall x \in (0; 1) f'(x) = 1 \neq 0$ ($f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$).

Twierdzenie Lagrange'a

Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na $\langle a, b \rangle$.

Wtedy $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dowód:

Zdefiniujmy funkcję $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Jest to funkcja ciągła na $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna na (a, b) , przy czym $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$\left. \begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{bf(b)-af(b)-bf(b)+bf(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(a)=g(b).$$

Czyli g spełnia założenia Rolle'a. Zatem $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$, a więc

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Przykład 125 Wykażemy, że

$$\forall k \in (0, 1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^k - n^k = 0.$$

W tym celu, dla ustalonego $k \in (0, 1)$, rozważmy funkcję $f(x) = x^k$. Mamy $f'(x) = kx^{k-1}$.

Na mocy twierdzenia Lagrange'a:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists c_n \in (n, n+1) \quad kc_n^{k-1} = \frac{(n+1)^k - n^k}{n+1-n} = (n+1)^k - n^k.$$

$k-1 < 0 \Rightarrow (n+1)^{k-1} \leq c_n^{k-1} \leq n^{k-1} \Rightarrow k(n+1)^{k-1} \leq (n+1)^k - n^k \leq kn^{k-1}$ i z twierdzenia o trzech ciągach wynika teza.

Twierdzenie (Reguła de l'Hospitala)

Niech f, g będą funkcjami spełniającymi warunki

$$(1a) \quad \lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} g(x) = 0, \text{ przy czym } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in S(A);$$

$\vee$

$$(1b) \quad \lim_{x \rightarrow A} f(x) \in \{+\infty, -\infty\} \ni \lim_{x \rightarrow A} g(x).$$

$$(2) \quad \text{Istnieje } \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

gdzie $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $S(A)$ oznacza sąsiedztwo A , przy czym granice w punkcie mogą być obustronne jak i jednostronne (wtedy $S(A)$ oznacza odpowiednio obustronne lub jednostronne sąsiedztwo A).

UWAGA:

Z faktu nie istnienia granicy $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie wynika, że istnieje granica $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Przykład 126 $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$,
 $g(x) = \sin x$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \cdot (-\sin \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nie istnieje.}$$

W przeciwnym wypadku istniałaby granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.
 Z drugiej strony,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Przykład 127 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{100x^{99}}{\frac{1}{x}} = \frac{100}{1} = 100$.

Przykład 128 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2} = \left[\frac{+\infty}{2} \right] = +\infty$.

Przykład 129 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2\sqrt{x} = 0$.

Przykład 130 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = [-\infty + \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x + x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{tg}^2 x + x \cdot 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{0}{2} = 0$.

Przykład 131 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{[0 \cdot (-\infty)]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=}}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x} = e^0 = 1$.

Przykład 132 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^x = [1^{-\infty}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\ln \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(\frac{x+5}{x-2} \right)} = e^{[-\infty \cdot 0]} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+5}{x-2} \right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=}} e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x-2}{x+5} \cdot \frac{x-2-x-5}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{(x+5)(x-2)}} = e^7$.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D_f$.

Różniczką funkcji f w danym punkcie x_0 nazywamy funkcję $df(x_0)$ zmiennej $\Delta x = x - x_0$ zadaną wzorem:

$$df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

OBSERWACJA

(obliczanie przybliżonych wartości funkcji)

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ dla $\Delta x \approx 0$, przy czym $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df(x_0)(\Delta x)}{\Delta x} = 0$,
gdzie $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Przykład 133 Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $\cos(0,02)$.

$f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,02$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -\sin 0 = 0$.

Czyli $\cos(0,02) \approx 1 + 0 \cdot 0,02 = 1$.

Przykład 134 Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

$f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = -\frac{1}{5}$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 1$.

Czyli $\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = f(0 + (-\frac{1}{5})) \approx 1 + 1 \cdot (-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$.

Przykład 135 Obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka równania

$$\frac{3x-1}{x} + \ln x = 2,004.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x) = \frac{3x-1}{x} + \ln x$ dla $x > 0$ jest rosnąca (jako suma funkcji rosnących), a zatem odwracalna.

$$f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1.$$

$$f'(x) = \frac{3x-3x+1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 2.$$

$$f(x) = 2,004 \Leftrightarrow x = f^{-1}(2,004) \approx f^{-1}(2) + (f^{-1})'(2) \cdot 0,004 = f^{-1}(2) + \frac{1}{f'(1)} \cdot 0,004 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,004 = 1,002.$$

Definicja.

Pochodną rzędu $n \in \mathbb{N}$ funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie:

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0),$$

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0),$$

...

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Funkcję przyporządkowującą argumentowi x wartość $f^{(n)}(x)$ n -tej pochodnej f w punkcie x nazywamy n -tą pochodną funkcji f i oznaczamy przez $f^{(n)}$.

Definicja.

Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ której pochodna rzędu n jest funkcją ciągłą nazywamy funkcją klasy C^n . Piszemy wtedy $f \in C^n(X)$.

Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ która ma pochodne wszystkich rzędów nazywamy funkcją klasy C^∞ . Piszemy wtedy $f \in C^\infty(X)$.

OZNACZENIE Małe rzędy pochodnych oznaczamy rzymskimi cyframi: f' , f'' , f''' , f^{IV} , itd.

OZNACZENIE $f^{(n)}(x_0) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0) = D^n f(x_0)$.

OBSERWACJA

$\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow \exists r > 0 \forall x \in V(x_0, r)$ istnieją wszystkie pochodne niższych rzędów tzn. $f^{(n-1)}(x), \dots, f'(x)$.

UWAGA:

Implikacja w drugą stronę nie musi być prawdziwa.

Przykład 136

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , x \geq 0 \\ x+1 & , x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1.$$

Czyli zarówno f jak i f' są dobrze określone i ciągłe na $\mathbb{R}$. Ale

$$f''(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f''_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1 \\ f''_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow f''_+(0) \neq f''_-(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(0) \text{ nie istnieje.}$$

Definicja.

Funkcję, która ma pochodną rzędu n w punkcie x_0 nazywamy n -krotnie różniczkowalną w punkcie x_0 .

Definicja.

Funkcję nazywamy n -krotnie różniczkowalną, jeżeli jest n -krotnie różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład 137 $f(x) = \cos^2 x$,

$$f'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x,$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x,$$

$$f'''(x) = 4 \sin 2x,$$

$$f^{IV}(x) = 8 \cos 2x,$$

$$f^v(x) = -16 \sin 2x \quad \text{itd.}$$

$$\text{Łatwo indukcyjnie udowodnić, że } f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{n-1} \cos 2x, & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2^{n-1} \sin 2x, & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases},$$

$$\text{lub, że } f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin(2x + (n+1)\frac{\pi}{2}).$$

Przykład 138 $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ itd.Łatwo indukcyjnie pokazać, że $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.**Przykład 139** $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, $f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4} = -6x^{-4}$, itd.Łatwo indukcyjnie pokazać, że $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (0; +\infty)$.**Twierdzenie** (wzór Leibniza)Jeżeli f i g są n -krotnie różniczkowalne w punkcie x_0 , to iloczyn również i zachodzi wzór:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0) =$$

$$= f^{(n)}(x_0)g(x_0) + n f^{(n-1)}(x_0)g'(x_0) + \dots + n f'(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + f(x_0)g^{(n)}(x_0).$$

Przykład 140 $h(x) = \cos^2 x \ln x = f(x)g(x)$, gdzie $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \ln x$.

$$h^{IV}(x) = \binom{4}{0} f^{IV}(x)g(x) + \binom{4}{1} f'''(x)g'(x) + \binom{4}{2} f''(x)g''(x) + \binom{4}{3} f'(x)g'''(x) +$$

$$+ \binom{4}{4} f(x)g^{IV}(x) \stackrel{\text{Przykłady 137 i 139}}{=} \\ = 8 \cos 2x \cdot \ln x + 16 \sin 2x \cdot \frac{1}{x} + 12 \cos 2x \cdot \frac{1}{x^2} - 8 \sin 2x \cdot \frac{1}{x^3} - 6 \cos^2 x \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Definicja.Założmy, że f jest funkcją n -krotnie różniczkowalną w punkcie x_0 .

Wielomian

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie x_0 .Dla $x_0=0$ wielomian ten nazywamy wielomianem Maclaurina.Wyrażenie $R_n(x) = f(x) - P_{n-1}(x)$ nazywamy n -tą resztą Lagrange'a.**Twierdzenie** (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a)Jeżeli $f \in C^{n-1}(\langle x_0, x \rangle)$ jest funkcją n -krotnie różniczkowalną na przedziale $(x_0; x)$, to $\exists c \in (x_0; x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{tzn.}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

UWAGA:

Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla przedziału $\langle x; x_0 \rangle$. Wtedy $c \in (x; x_0)$.

WNIOSEK (Wzór Maclaurina)

Przy założeniach wzoru Taylora dla $x_0 = 0$ zachodzi dla pewnego $c \in (0; x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

Przykład 141 $f(x) = \cos x$, $n = 6$

Wielomian Taylora w punkcie $\frac{\pi}{4}$:

$$P_6(x) = \cos \frac{\pi}{4} + \frac{-\sin \frac{\pi}{4}}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{-\cos \frac{\pi}{4}}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{4!}(x - \frac{\pi}{4})^4 + \frac{-\sin \frac{\pi}{4}}{5!}(x - \frac{\pi}{4})^5 + \frac{-\cos \frac{\pi}{4}}{6!}(x - \frac{\pi}{4})^6 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}(x - \frac{\pi}{4})^4 - \frac{\sqrt{2}}{240}(x - \frac{\pi}{4})^5 - \frac{\sqrt{2}}{1440}(x - \frac{\pi}{4})^6.$$

Wielomian Maclaurina:

$$P_6(x) = \cos 0 + \frac{-\sin 0}{1!}x + \frac{-\cos 0}{2!}x^2 + \frac{\sin 0}{3!}x^3 + \frac{\cos 0}{4!}x^4 + \frac{-\sin 0}{5!}x^5 + \frac{-\cos 0}{6!}x^6 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6.$$

Przykład 142 Policzyc pierwiastek z liczby Eulera $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0,01 oraz 0,001.

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ze wzoru Maclaurina:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^0 + \frac{e^0}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e^0}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{e^0}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{e^c}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \text{gdzie } c \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0; 1).$$

$$|R_4(\frac{1}{2})| = \left| \frac{e^c}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right| < \frac{e}{24 \cdot 16} < \frac{3}{3 \cdot 8 \cdot 16} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100}.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ c < 1 \end{array}$$

$$\sqrt{e} = f(\frac{1}{2}) \approx P_3(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = 1\frac{31}{48} = 1,6458(3).$$

Czyli $\sqrt{e} = 1,65$ z dokładnością do 0,01.

Analogicznie:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^0 + \frac{e^0}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e^0}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{e^0}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{e^0}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{e^c}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \text{gdzie } c \in (0; 1).$$

$$|R_5(\frac{1}{2})| = \left| \frac{e^c}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right| < \frac{e}{120 \cdot 32} < \frac{3}{3 \cdot 40 \cdot 32} = \frac{1}{1280} < \frac{1}{1000}.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ c < 1 \end{array}$$

$$\sqrt{e} = f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = 1\frac{249}{384} = 1,6484375.$$

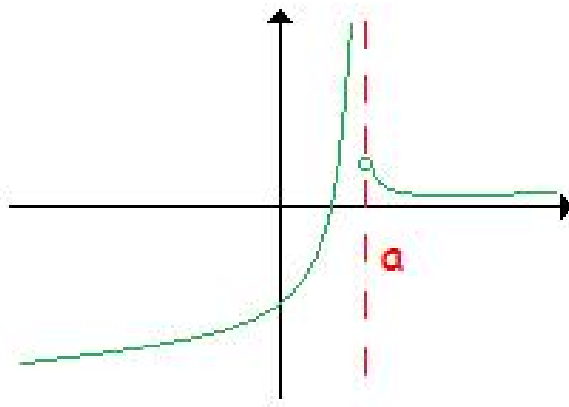
Czyli $\sqrt{e} = 1,648$ z dokładnością do 0,001.

8 BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

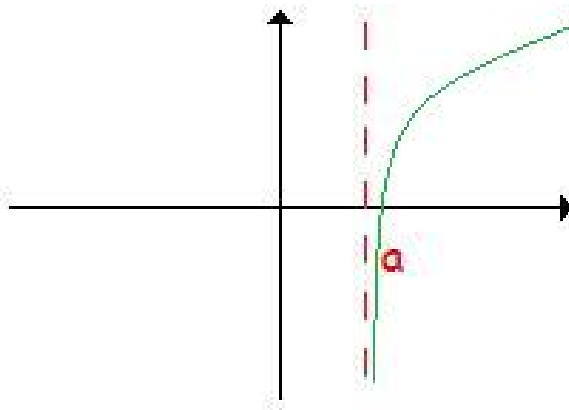
Definicja.

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową $\left| \begin{array}{l} \text{lewostronną} \\ \text{prawostronną} \end{array} \right|$ wykresu funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \left| \begin{array}{l} a^- \\ a^+ \end{array} \right|} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}.$$



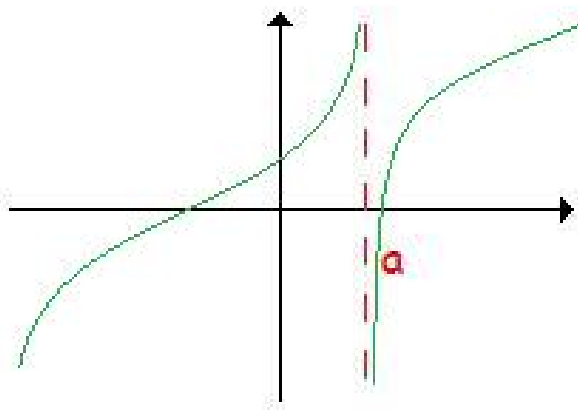
Rysunek 1: Asymptota pionowa lewostronna



Rysunek 2: Asymptota pionowa prawostronna

Definicja.

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f jeśli jednocześnie jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.



Rysunek 3: Asymptota pionowa obustronna

OBSERWACJA

Funkcja ciągła może mieć asymptoty pionowe jedynie na krańcach przedziałów określoności.

Przykład 143 $f(x) = \frac{3x-2}{x+7}$.

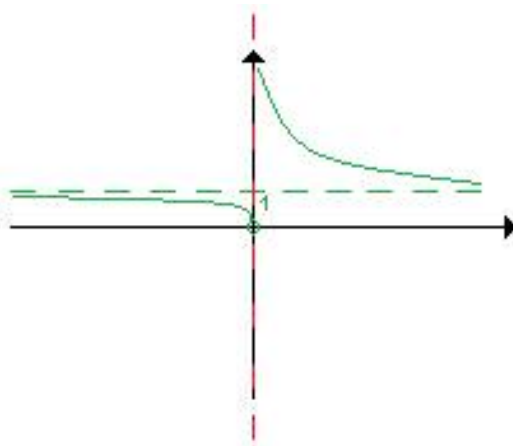
$D_f = (-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$ i funkcja jest ciągła $\Rightarrow$ może mieć asymptotę pionową jedynie dla $x = -7$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{3x-2}{x+7} = \left[\frac{-23}{0^-} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{3x-2}{x+7} = \left[\frac{-23}{0^+} \right] = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -7 \text{ jest asymptotą pionową wykresu } f \text{ (obustronna).}$$

Przykład 144 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ (patrz przykład 70).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji f , ale nie lewostronną.

Dla $x \neq 0$ f jest ciągła, więc innych asymptot pionowych nie ma.

Rysunek 4: Wykres f z przykładu 144

UWAGA:

Funkcja może mieć nawet nieskończenie wiele asymptot pionowych.

Przykład 145 $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$. Czyli proste $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ są asymptotami pionowymi funkcji ctg .

Definicja.

Prosta $y = a$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f ,

jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

OBSERWACJA

Aby funkcja mogła mieć asymptotę poziomą musi być określona w pewnym sąsiedztwie $+\infty$ lub $-\infty$.

UWAGA:

Funkcja może mieć co najwyżej dwie asymptoty poziome w $+\infty$ i $-\infty$.

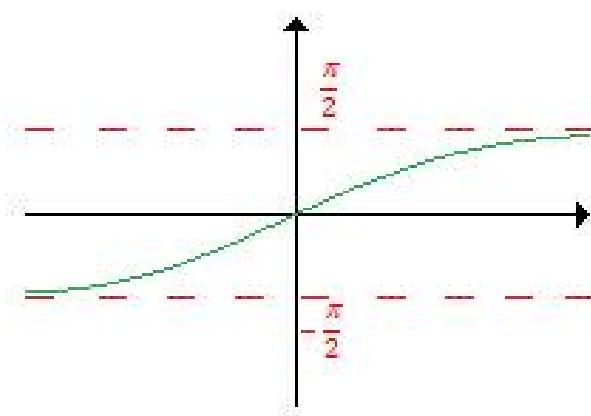
Przykład 146 $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$.



Rysunek 5: Wykres funkcji arctg

Przykład 147 $f(x) = \sqrt{x}$.

Funkcja nie jest określona dla $x < 0$, więc nie ma asymptoty poziomej w $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow$ brak asymptoty poziomej w $+\infty$.

UWAGA:

Wykres funkcji może przecinać swoją asymptotę nawet nieskończenie wiele razy.

Przykład 148 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{|x|} & \leq \frac{\sin x}{x} \leq & \frac{1}{|x|} \\ x \rightarrow \pm\infty \downarrow & & \downarrow x \rightarrow \pm\infty \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Zatem, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Czyli prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $+\infty$ i $-\infty$ i ma z nim punkty wspólne postaci $\{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Prosta $y = ax + b$, $a \neq 0$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f , jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

OBSERWACJA

Aby funkcja mogła mieć asymptotę ukośną musi być określona w pewnym sąsiedztwie $+\infty$ lub $-\infty$.

UWAGA:

Funkcja może mieć co najwyżej dwie asymptoty ukośne w $+\infty$ i $-\infty$, przy czym nie może mieć jednocześnie asymptoty ukośnej i poziomej w $+\infty$ ani $-\infty$.

OBSERWACJA

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $|-\infty| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow |-\infty|} \frac{f(x)}{x} \text{ i } b = \lim_{x \rightarrow |-\infty|} (f(x) - ax).$$

Przykład 149 $f(x) = x \cdot \sin x$.

Funkcja ta nie ma granicy w $+\infty$ ani $-\infty$, więc jej wykres nie ma asymptot poziomych.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \text{ nie istnieje i } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \text{ nie istnieje,}$$

więc wykres funkcji f nie ma asymptot ukośnych.

Przykład 150 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$D_f = (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty).$$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$, więc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ i wykres funkcji f nie ma asymptot poziomych.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = a_1.$$

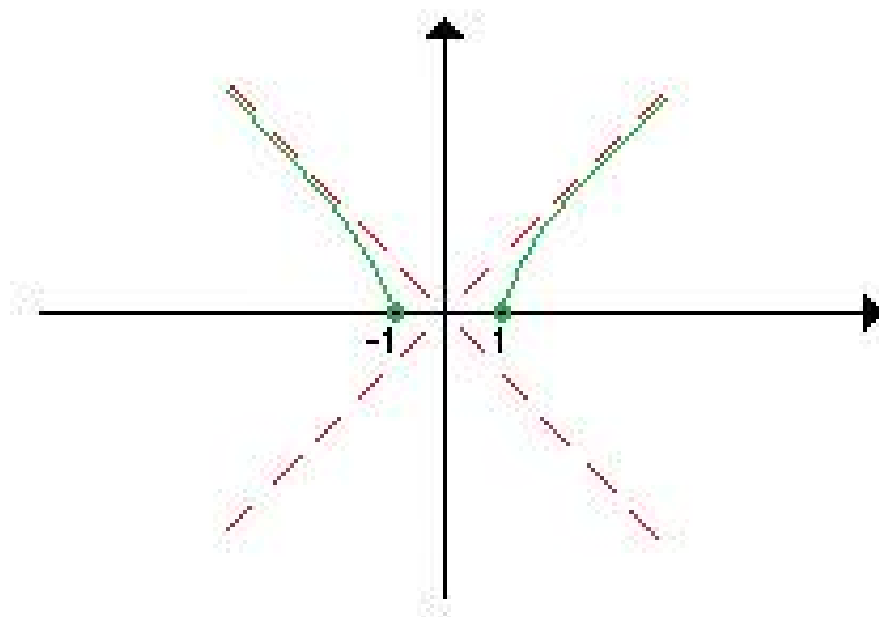
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = 0 = b_1. \end{aligned}$$

Czyli prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną wykresu f w $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \stackrel{x \leq 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1 = a_2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x = [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = 0 = b_2. \end{aligned}$$

Czyli prosta $y = -x$ jest asymptotą ukośną wykresu f w $-\infty$.

Rysunek 1: Wykres f z przykładu 150

Przykład 151 $f(x) = x + \sin(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{bo } x + \sin x \geq x - 1 \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{bo } x + \sin x \leq x + 1 \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ nie ma asymptot poziomych.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sin x - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ nie istnieje} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nie ma asymptot ukośnych.

Przykład 152 $f(x) = \sqrt{x}$.

Wykres f nie ma asymptot poziomych (patrz przykład 147),

$$\text{ale } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Rightarrow$ wykres f nie ma asymptot ukośnych.

Twierdzenie (Warunki wystarczające na monotoniczność funkcji)

Niech I będzie przedziałem, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją różniczkowalną.

Jeżeli $\forall x \in I$:

- (1) $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ jest stała na I .
- (2) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca na I .
- (3) $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ jest niemalejąca na I .
- (4) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca na I .

(5) $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ jest nierosnąca na I .

UWAGA:

(6) Jeśli $\forall x \in I \ f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$, ale zbiór $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ jest skończony $\Rightarrow f$ jest rosnąca na I .

(7) Jeśli $\forall x \in I \ f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$, ale zbiór $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ jest skończony $\Rightarrow f$ jest malejąca na I .

Dowód:

Bierzemy $x_1, x_2 \in I$ takie, że $x_1 < x_2$.

Z tw. Lagrange'a:

Jeśli $K = \langle x_1, x_2 \rangle$, f jest ciągła na K i różniczkowalna na (x_1, x_2) ,

to $\exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Ad (1) $c \in I \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow f$ jest stała na I .

Ad (2) $c \in I \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$ jest rosnąca na I .

Ad (3) $c \in I \Rightarrow f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f$ jest niemalejąca na I .

Ad (4) $c \in I \Rightarrow f'(c) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f$ jest malejąca na I .

Ad (5) $c \in I \Rightarrow f'(c) \leq 0 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow f$ jest nierosnąca na I .

Ad (6) $c \in I \Rightarrow f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Gdybyśmy jednak przyjęli $f(x_2) = f(x_1)$, to ponieważ f jest niemalejąca na K , to f byłaby stała na K i jej pochodna byłaby równa 0 na K , co byłoby sprzeczne z założeniem,

że zbiór $\{x \in I : f'(x) = 0\}$ jest skończony. Stąd $f(x_2) > f(x_1)$ czyli f jest rosnąca na I .

Ad (7) Dowód analogiczny jak dowód (6). ■

Przykład 153 $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x \neq 0$$

f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$.

Nie jest jednak malejąca w ich sumie $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, bo np. $-1 < 1$,

$$\text{ale } f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1} = f(1).$$

Przykład 154 $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{przy czym } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

więc f jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.

Przykład 155 $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x.$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ - w tych przedziałach funkcja rośnie.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos x < 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ - w tych przedziałach funkcja maleje.

Definicja.

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$:

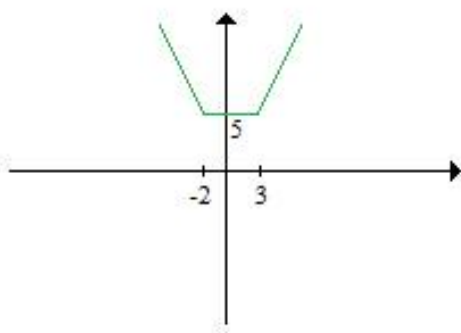
- słabe maksimum lokalne, jeżeli $\exists r > 0 \quad \forall x \in S(x_0, r) \quad f(x) \leq f(x_0)$;
- słabe minimum lokalne, jeżeli $\exists r > 0 \quad \forall x \in S(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0)$.

Jeżeli f ma w punkcie x_0 słabe maksimum lub minimum lokalne, to mówimy, że ma w punkcie x_0 słabe ekstremum lokalne.

Przykład 156 $f(x) = |x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} -2x + 1, & x < -2 \\ 5, & -2 \leq x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$

$\forall x_0 \in (-2, 3) \quad x_0$ jest słabym maksimum lokalnym funkcji f .

$\forall x_0 \in \langle -2, 3 \rangle \quad x_0$ jest słabym minimum lokalnym funkcji f .



Rysunek 2: Wykres f z przykładu 156

Definicja.

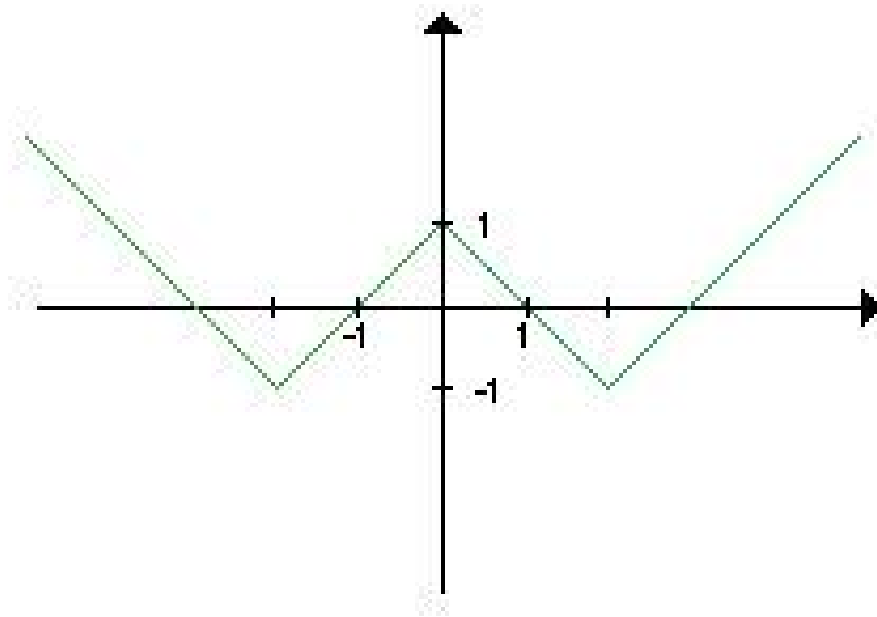
Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$:

- maksimum lokalne, jeżeli $\exists r > 0 \quad \forall x \in S(x_0, r) \quad f(x) < f(x_0)$;
- minimum lokalne, jeżeli $\exists r > 0 \quad \forall x \in S(x_0, r) \quad f(x) > f(x_0)$.

Jeżeli f ma w punkcie x_0 maksimum lub minimum lokalne, to mówimy, że ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne.

Przykład 157 $f(x) = ||x| - 2| - 1$.

f ma w 0 maksimum lokalne, a w -2 i 2 minimum lokalne.

Rysunek 3: Wykres f z przykładu 157

Twierdzenie FERMATA (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie słabe ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód:

Założmy, że f ma w punkcie x_0 słabe maksimum lokalne (w przypadku słabego minimum lokalnego dowód jest analogiczny).

To oznacza, że dla h bliskich 0 mamy $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{oraz} \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

$$f \text{ jest różniczkowalna w punkcie } x_0 \Rightarrow 0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

■

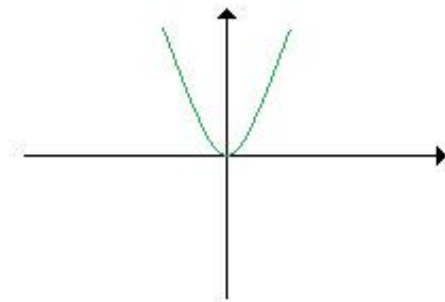
OBSERWACJA

Funkcja może mieć słabe ekstremum lokalne (ale nie musi!) w punktach, w których pochodna jest równa 0 lub nie istnieje.

Przykład 158 $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

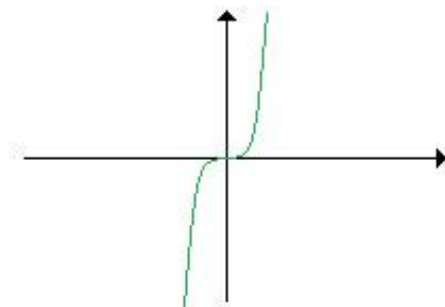
f ma w 0 minimum lokalne.

Rysunek 4: Wykres f z przykładu 158

Przykład 159 $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

f nie ma w 0 ekstremum.

Rysunek 5: Wykres f z przykładu 159

Przykład 160 $f(x) = |x|$

f jest różniczkowalna $\forall x \neq 0$, przy czym $f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ więc $f'(x) \neq 0, \forall x \neq 0$.

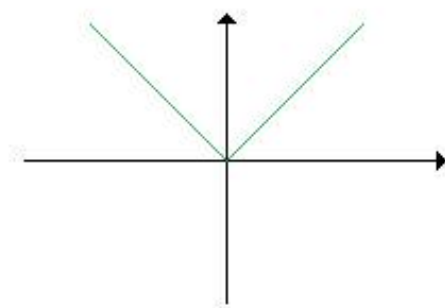
$f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ nie istnieje. f ma w 0 minimum lokalne.

Przykład 161

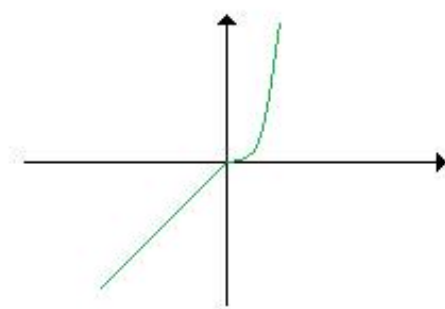
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$$

f jest różniczkowalna $\forall x \neq 0$, przy czym $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$ więc $f'(x) \neq 0, \forall x \neq 0$

$f'_+(0) = 0 \neq -1 = f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ nie istnieje. f nie ma w 0 ekstremum.



Rysunek 6: Wykres f z przykładu 160



Rysunek 7: Wykres f z przykładu 161

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Twierdzenie (I warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli $\exists r > 0$ f jest różniczkowalna w $S(x_0, r)$ i ciągła w punkcie x_0 , to:

(1) $\forall x \in S^-(x_0, r) \quad f'(x) > 0$ oraz $\forall x \in S^+(x_0, r) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne;

(2) $\forall x \in S^-(x_0, r) \quad f'(x) < 0$ oraz $\forall x \in S^+(x_0, r) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

Dowód:

Ad (1) $\forall x \in (x_0 - r, x_0) \quad f'(x) > 0$ i f ciągła w $x_0 \Rightarrow f$ rosnąca na przedziale $(x_0 - r, x_0)$.

$\forall x \in (x_0, x_0 + r) \quad f'(x) < 0$ i f ciągła w $x_0 \Rightarrow f$ malejąca na przedziale $(x_0, x_0 + r)$.

Jeśli weźmiemy $x \in S(x_0, r)$, to

albo $x < x_0$ i wtedy $f(x) < f(x_0)$, bo f rosnąca na $(x_0 - r, x_0)$;

albo $x > x_0$ i wtedy $f(x) < f(x_0)$, bo f malejąca na $(x_0, x_0 + r)$.

Czyli f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Ad (2) Dowód analogiczny jak dla (1). ■

Przykład 162 $f(x) = x^2$ (porównaj przykład 158).

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x, \quad f'(0) = 0 \\ x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ ma minimum lokalne w } 0.$$

Przykład 163 $f(x) = x^3$ (porównaj przykład 159).

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0 \\ x \neq 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ nie ma ekstremum w } 0, \text{ bo jest rosnąca.}$$

Twierdzenie (II warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli $\exists r > 0$ f ma ciągłą n -tą pochodną na $V(x_0, r)$,

przy czym $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, to:

(1) n jest liczbą parzystą i $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

(2) n jest liczbą parzystą i $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

(3) n jest liczbą nieparzystą i $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ nie ma ekstremum w punkcie x_0 .

Dowód:

Ad (1) $f^{(n)}(x_0) < 0$ i $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą na $V(x_0, r) \Rightarrow \exists r' \leq r \quad \forall x \in V(x_0, r') \quad f^{(n)}(x) < 0$ (z tw. o lokalnym zachowaniu znaku).

f spełnia założenia tw. Taylora na $V(x_0, r')$, więc dla każdego $x \in S(x_0, r')$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{dla pewnego } c \in (x_0, x) \text{ lub } c \in (x, x_0).$$

Ponieważ $c \in S(x_0, r')$, więc $f^{(n)}(c) < 0$. Ponieważ n jest parzyste, więc $(x - x_0)^n > 0$.

Oczywiście $n! > 0$, zatem $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, co oznacza, że w punkcie x_0 f ma maksimum lokalne.

Ad (2) Dowód analogiczny jak dla (1).

Ad (3) $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, więc można założyć, że $f^{(n)}(x_0) > 0$ (gdy

$f^{(n)}(x_0) < 0$ dowód analogiczny).

Podobnie jak wcześniej, z tw. o lokalnym zachowaniu znaku $f^{(n)}(x) > 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 , czyli $f^{(n)}(c) > 0$.

n jest nieparzyste, czyli $(x - x_0)^n > 0$ dla $x > x_0$ i $(x - x_0)^n < 0$ dla $x < x_0 \Rightarrow \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n > 0$ dla $x > x_0$ i $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n < 0$ dla $x < x_0$.

To oznacza, że $f(x) > f(x_0)$ dla $x > x_0$ i $f(x) < f(x_0)$ dla $x < x_0$.

Czyli w punkcie x_0 brak ekstremum.

■

Przykład 164 $f(x) = \sin^4 x$.

$$f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x \Rightarrow f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = 12 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin^4 x \Rightarrow f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = 24 \sin x \cos^3 x - 24 \sin^3 x \cos x - 16 \sin^3 x \cos x = 24 \sin x \cos^3 x - 40 \sin^3 x \cos x \Rightarrow f'''(0) = 0.$$

$$f^{IV}(x) = 24 \cos^4 x - 72 \sin^2 x \cos^2 x - 120 \sin^2 x \cos^2 x + 40 \sin^4 x \Rightarrow f^{IV}(0) = 24 > 0.$$

Czyli f ma w 0 minimum lokalne.

Przykład 165 $f(x) = \ln^3 x$.

$$f'(x) = 3 \ln^2 x \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 0.$$

$$f''(x) = 6 \ln x \frac{1}{x^2} - 3 \ln^2 x \frac{1}{x^2} = 3 \frac{\ln x}{x^2} (2 - \ln x) \Rightarrow f''(1) = 0.$$

$$f'''(x) = 3 \frac{x - 2 \ln x}{x^4} (2 - \ln x) - 3 \frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0.$$

Czyli f nie ma w 1 ekstremum lokalnego.

Definicja.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$:

– maksimum globalne, jeżeli $\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0)$.

– minimum globalne, jeżeli $\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0)$.

Jeżeli f ma w punkcie x_0 maksimum lub minimum globalne, to mówimy, że ma w punkcie x_0 ekstremum globalne.

Przykład 166 $f(x) = |x|$ ma w 0 minimum globalne, bo $\forall x \in D_f \quad |x| \geq 0 = |0|$.

W żadnym punkcie nie ma natomiast maksimum globalnego, bo $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$.

Przykład 167 $f(x) = \arccos x$ ma w -1 maksimum globalne, a w 1 minimum globalne, bo

$$\forall x \in D_f = \langle -1, 1 \rangle \quad \arccos 1 = 0 \leq \arccos x \leq \pi = \arccos(-1).$$

Przykład 168 $f(x) = \sin x$ ma w punktach $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) minimum globalne równe -1 , a w punktach $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) maksimum globalne równe 1 .

Przykład 169 $f(x) = \operatorname{tg} x$ nie ma ekstremów globalnych, bo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \text{ a } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

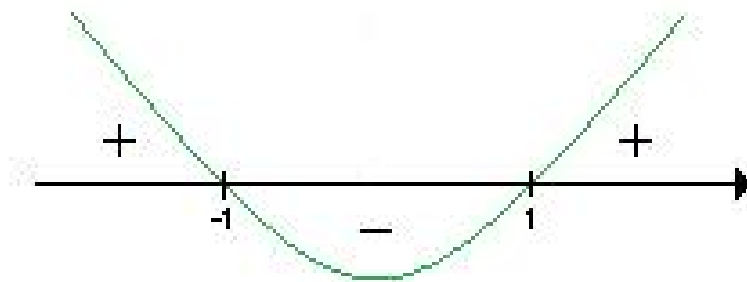
Przykład 170 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nie ma ekstremów globalnych, bo $W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest przedziałem obustronnie otwartym (w żadnym punkcie f nie osiąga wartości $-\frac{\pi}{2}$ ani $\frac{\pi}{2}$).

UWAGA:

Każde ekstremum globalne jest zarazem ekstremum lokalnym, ale implikacja w drugą stronę nie musi być prawdziwa.

Przykład 171 $f(x) = x^3 - 3x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$



Rysunek 1: Znak f' z przykładu 171

f ma w -1 maksimum lokalne $f(-1) = 2$.

f ma w 1 minimum lokalne $f(1) = -2$.

Ale f nie ma ekstremów globalnych, bo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Z tw. Weierstrassa o przyjmowaniu kresów wynika, że funkcja ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$ przyjmuje w tym przedziale maksimum globalne i minimum globalne.

Aby je znaleźć postępujemy według następującego algorytmu:

(1) Znajdujemy zbiór $Z = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$

oraz zbiór $N = \{x \in (a, b) : f'(x) \text{ może nie istnieć}\}$,

(2) Liczymy wartości funkcji f dla każdego elementu zbioru $Z \cup N \cup \{a, b\}$,

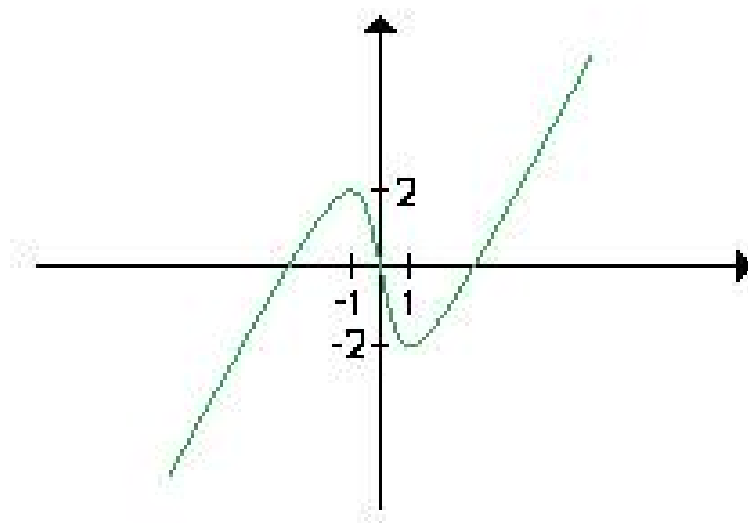
(3) Porównujemy policzone wartości.

Największa z nich to maksimum globalne, a najmniejsza to minimum globalne.

Przykład 172 Znaleźć ekstrema globalne funkcji $f(x) = |x^2 - 3|e^x$ na zbiorze $\langle -4, 2 \rangle$.

$$f(x) = \begin{cases} (3 - x^2)e^x, & x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle \\ (x^2 - 3)e^x, & x \in \langle -4, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}, 2 \rangle \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (-x^2 - 2x + 3)e^x, & x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle \\ (x^2 + 2x - 3)e^x, & x \in \langle -4, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}, 2 \rangle \end{cases}$$

Rysunek 2: Wykres f z przykładu 171

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-1)(x+3)e^x, & x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ (x-1)(x+3)e^x, & x \in \langle -4, -\sqrt{3} \rangle \cup (\sqrt{3}, 2) \end{cases}$$

$$Z = \{x \in \langle -4, 2 \rangle : f'(x) = 0\} = \{-3, 1\}.$$

$$N = \{x \in \langle -4, 2 \rangle : f'(x) \text{ może nie istnieć}\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

$$Z \cup N \cup \{-4, 2\} = \{-4, -3, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 2\}.$$

$$f(-4) = 13e^{-4}, f(-3) = 6e^{-3}, f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0, f(1) = 2e, f(2) = e^2.$$

Czyli f przyjmuje maksimum globalne równe e^2 w punkcie 2, a minimum globalne równe 0 w punktach $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

Przypomnijmy ze szkoły:

OBSERWACJA

Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) takie, że $x_1 \neq x_2$ ma postać:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

Niech $a < b$.

Definicja.

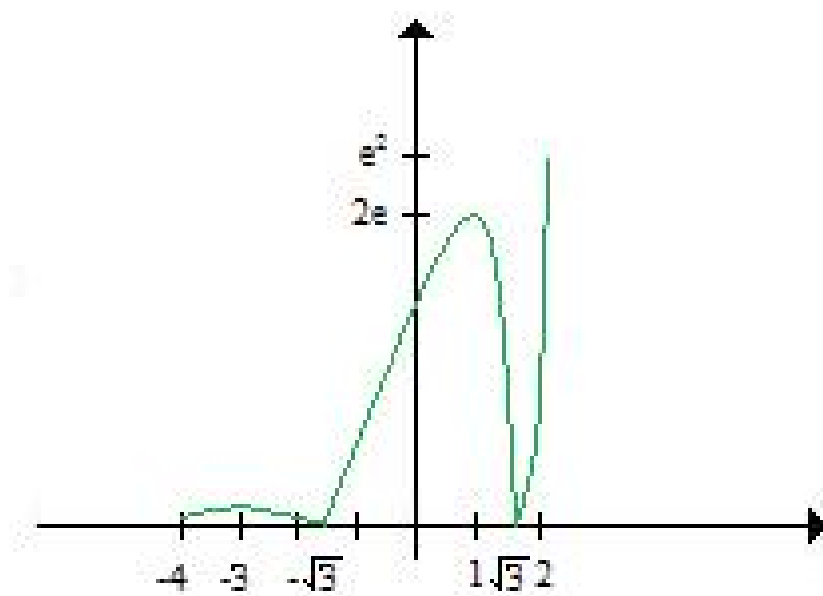
Funkcję $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy:

–wypukłą, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \forall \alpha \in (0, 1)$

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2);$$

–wklęsłą, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \forall \alpha \in (0, 1)$

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Rysunek 3: Wykres f z przykładu 172

Twierdzenie Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest:

–wypukła, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$

$$\forall x \in (x_1, x_2) \quad f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1);$$

–wkłęsła, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$

$$\forall x \in (x_1, x_2) \quad f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

UWAGA:

Funkcja jest wypukła, jeżeli odcinek dowolnej siecznej jej wykresu między punktami jej przecięcia z wykresem funkcji leży nad tym wykresem, a wkłęsła, jeśli leży pod wykresem funkcji.

Twierdzenie (Warunki wystarczające wypukłości i wkłęsłości)

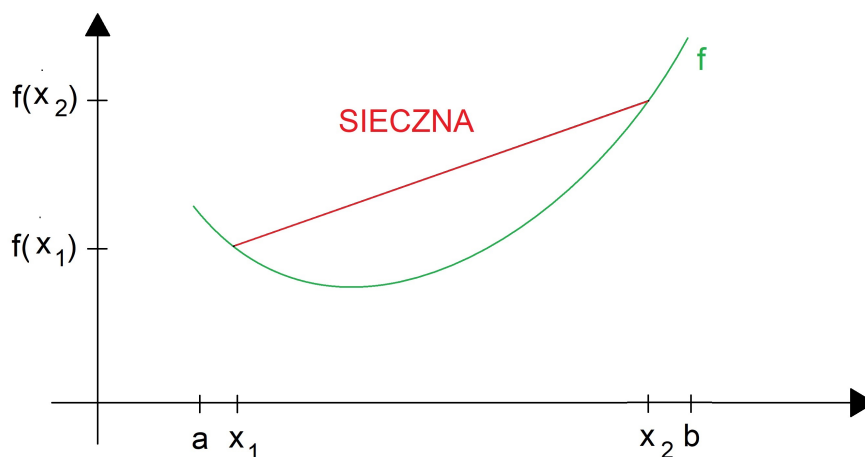
Jeżeli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i $\forall x \in (a, b)$ $\left| \begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right|$, to f jest $\left| \begin{array}{l} \text{wypukła} \\ \text{wkłęsła} \end{array} \right|$.

UWAGA:

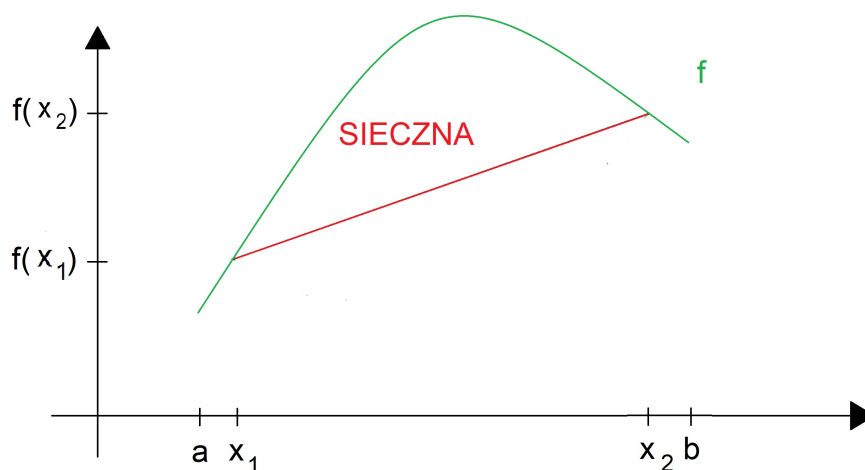
Implikacja w drugą stronę nie musi być prawdziwa.

Przykład 173 $f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2, & x > 0 \\ -2^{-x} \ln 2, & x < 0 \end{cases}.$$



Rysunek 4: Wykres funkcji wypukłej



Rysunek 5: Wykres funkcji wklęsłej

$$f''(x) = \begin{cases} 2^x \ln^2 2, & x > 0 \\ 2^{-x} \ln^2 2, & x < 0 \end{cases}.$$

f nie jest różniczkowalna w 0, ale jest wypukła na $\mathbb{R}$.

Przykład 174 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$, $\forall x \neq 0$.

f jest wypukła w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.

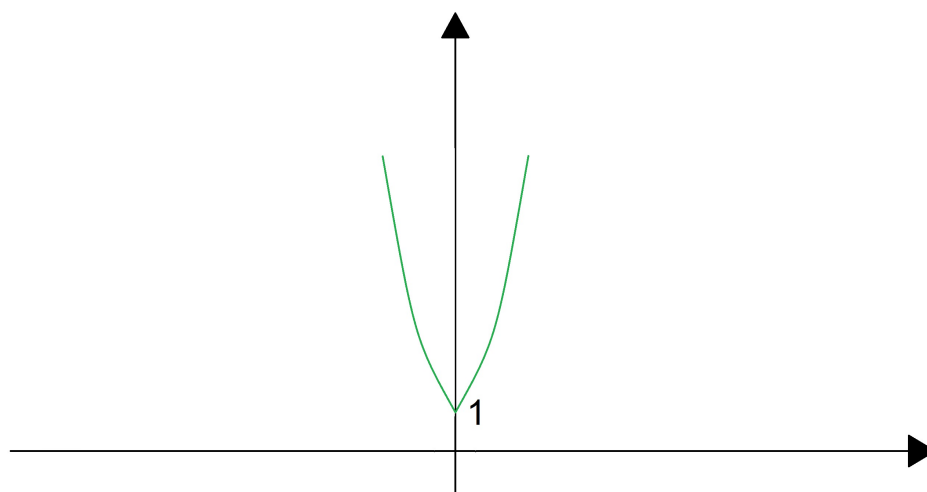
Nie jest jednak wypukła w sumie tych przedziałów, bo

np. odcinek łączący punkty $(-1, 1)$ i $(1, 1)$ nie leży nad wykresem f .

Przykład 175 $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ wklęsła.

$x \in (0, +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ wypukła.



Rysunek 6: Wykres funkcji z przykładu 173

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

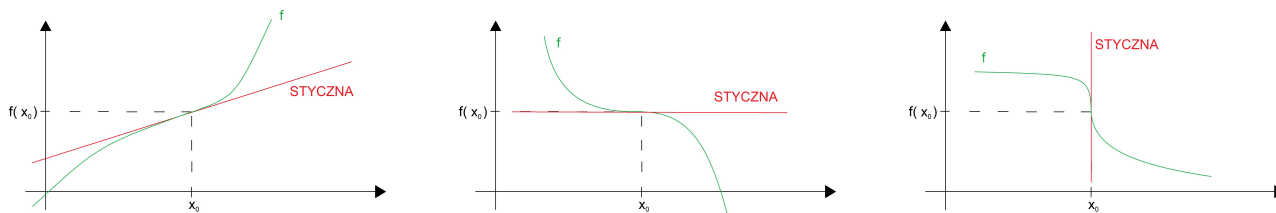
Definicja.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D_f$ (dopuszczamy przypadek nieistnienia pochodnej w punkcie x_0 , ale przy założeniu, że

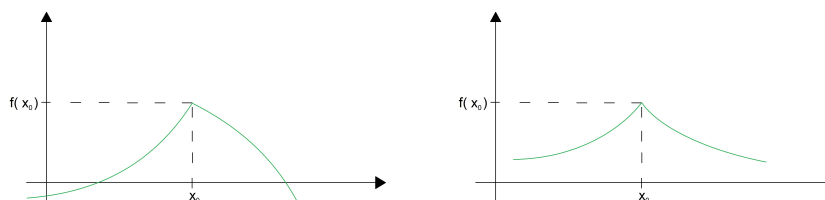
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \in \{+\infty, -\infty\} \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \in \{+\infty, -\infty\}.$$

Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f , jeżeli $\exists r > 0$

f jest wypukła na $(x_0 - r, x_0)$, a wklęsła na $(x_0, x_0 + r)$, albo na odwrót.



Rysunek 1: Punkty przegięcia



Rysunek 2: Brak punktów przegięcia

Twierdzenie (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)

Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

UWAGA:

Implikacja w drugą stronę nie musi być prawdziwa.

Przykład 176 $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ale punkt $(0, 0)$ nie jest punktem przegięcia wykresu funkcji f .

Twierdzenie (Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu $x_0 \in D_f$, f jest różniczkowalna w punkcie (x_0) oraz funkcja f'' jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 i zmienia w nim znak (z "+" na "-", lub na odwrót).

Wtedy $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia jej wykresu.

Przykład 177 $f(x) = x^4$, (patrz przykład 176)

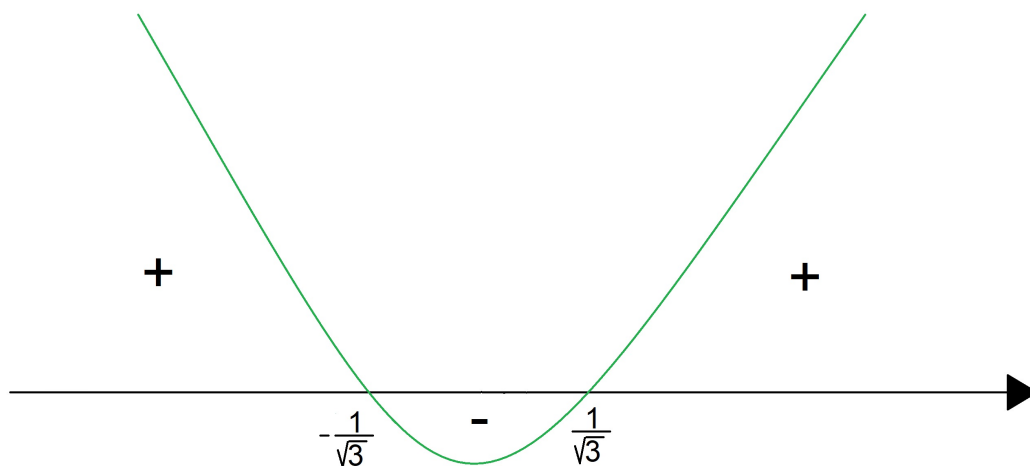
$f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, ale f'' nie zmienia znaku w 0.

Przykład 178 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{6\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

f jest wypukła w przedziałach $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ oraz $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, a wklęsła w przedziale $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

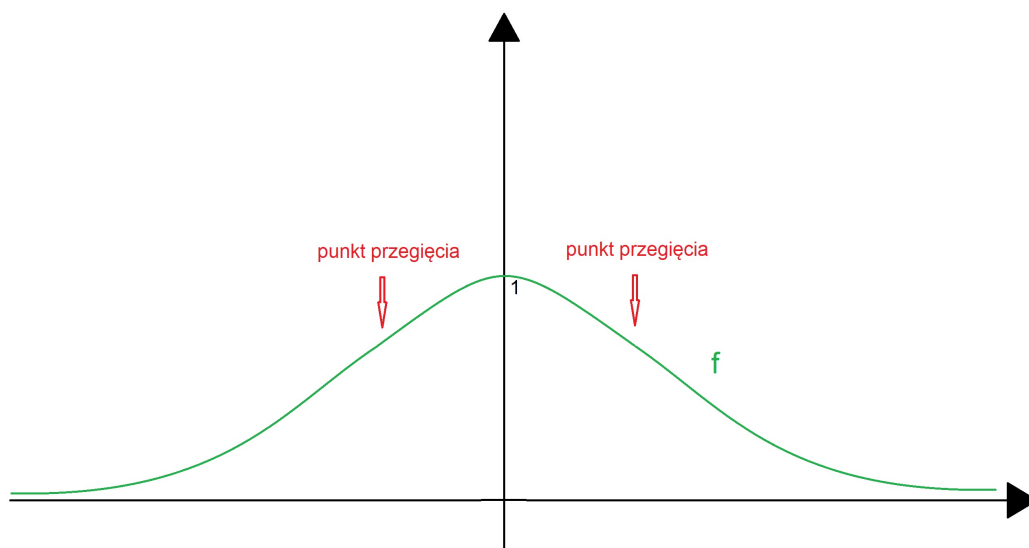


Rysunek 3: Znak drugiej pochodnej funkcji z przykładu 178

Punkty $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$ są punktami przegięcia jej wykresu.

SCHEMAT BADANIA PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Dziedzina funkcji.
2. Miejsce zerowe i wartość w 0.
3. Granice funkcji na końcach przedziałów określoności, asymptoty.
4. Pierwsza pochodna, monotoniczność i ekstrema.
5. Druga pochodna, wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia.
6. Tabelka znaków f' i f'' oraz schematyczny przebieg funkcji f .
7. Wykres funkcji.
8. Zbiór wartości funkcji W_f .



Rysunek 4: Wykres funkcji z przykładu 178

UWAGA:

- (1) Kolejność powyższych punktów można oczywiście zmienić.
- (2) Funkcję można badać również pod kątem parzystości i nieparzystości, okresowości, ciągłości itp.
- (3) Zbiór wartości W_f warto zostawić sobie na koniec - wtedy odczytuje się go łatwo z wykresu.
- (4) Punkt 6. nie jest niezbędny przy sporządzaniu wykresu, ale może być pomocny.

Tabelkę sporządzamy następująco :

- (a) W pierwszym wierszu umieszczamy argumenty w kolejności rosnącej od $\inf D_f$ do $\sup D_f$, zaznaczając w kolejnych kratkach punkty charakterystyczne dla f , końce przedziałów określoności, punkty nieciągłości, ekstrema lokalne i punkty przegięcia, a także przedziały określoności pomiędzy tymi punktami.
- (b) W drugim wierszu zaznaczamy znak f' wpisując $+$, $-$, 0 lub X (gdy f' nie istnieje).
- (c) W trzecim wierszu robimy to samo dla f'' .
- (d) W czwartym wierszu pod pojedynczymi argumentami wpisujemy wartości f w tych punktach, a pod przedziałami rysujemy schematyczny wygląd wykresu funkcji f przy pomocy strzałek, na których końcach ewentualnie zaznaczamy granice jednostronne funkcji f w jej punktach nieciągłości. Strzałki te wyglądają następująco :

f'	+	+	-	-
f''	+	-	+	-
f				

Przykład 179 Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

(1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) f nie ma miejsc zerowych (bo funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie)
 $f(0) = e^{\frac{1}{1-0^2}} = e$.

(3)

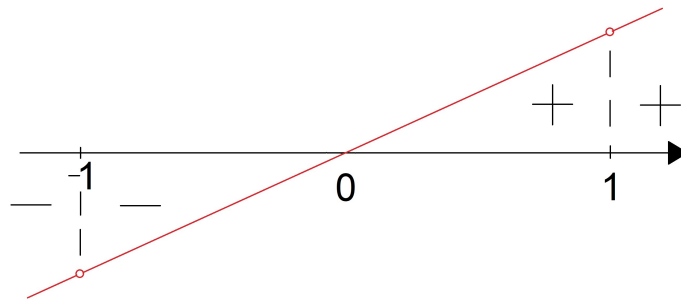
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{1-x^2}} &= e^{\left[\frac{1}{0^-}\right]} = [e^{-\infty}] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{1-x^2}} &= e^{\left[\frac{1}{0^+}\right]} = [e^{+\infty}] = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ jest asymptotą pionową prawostronną } f.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-x^2}} &= e^{\left[\frac{1}{0^+}\right]} = [e^{+\infty}] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x^2}} &= e^{\left[\frac{1}{0^-}\right]} = [e^{-\infty}] = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ jest asymptotą pionową lewostronną } f.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{1-x^2}} = e^{\left[\frac{1}{-\infty}\right]} = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ jest asymptotą poziomą } f \text{ w } +\infty \text{ i } -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ wykres f nie ma asymptot ukośnych.

(4) $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.



Rysunek 5: Znak pierwszej pochodnej funkcji z przykładu 179

f jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $(-1, 0)$. f jest rosnąca w przedziałach $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$.

f ma minimum lokalne w 0, $f_{\min}(0) = e$.

(5) $f''(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \left[\left(\frac{2x}{(1-x^2)^2} \right)^2 + \frac{2(1-x^2)^2 + 2x \cdot 2(1-x^2)2x}{(1-x^2)^4} \right] = e^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{4x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^4 + 8x^2 - 8x^4}{(1-x^2)^4} =$
 $= e^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{-6x^4 + 8x^2 + 2}{(1-x^2)^4} \Rightarrow$ znak f'' zależy tylko od znaku wielomianu $W(x) = -6x^4 + 8x^2 + 2$.

Sprowadzamy wielomian z licznika do postaci iloczynowej:

$$W(x) = -6x^4 + 8x^2 + 2 = 0$$

$$t = x^2 \Rightarrow -6t^2 + 8t + 2 = 0$$

$$\Delta = 64 + 48 = 112 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

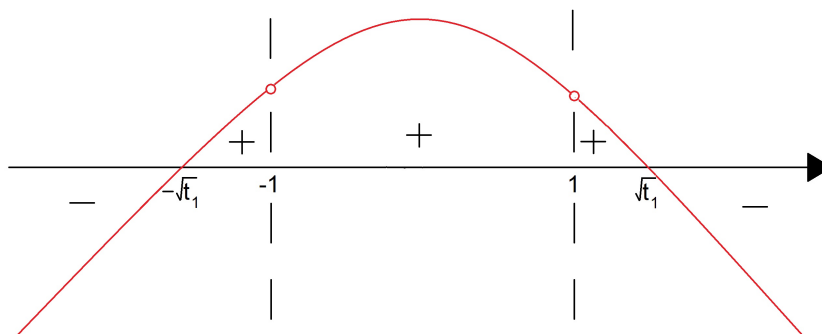
$$t_1 = \frac{-8 + 4\sqrt{7}}{-12} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} > 0$$

$$t_2 = \frac{-8 - 4\sqrt{7}}{-12} = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} < 0$$

$$W(x) = -6(t - t_1)(t - t_2) = -6(x^2 - t_1)(x^2 - t_2) = -6(x^2 - t_2)(x - \sqrt{t_1})(x + \sqrt{t_1}).$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow W(x) = -\sqrt{t_1} \vee x = \sqrt{t_1}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{t_1} > 1$, a $-\sqrt{t_1} < -1$ $\sqrt{t_1} \approx 1,55$



Rysunek 6: Znak drugiej pochodnej funkcji z przykładu 179

f jest wklęsła w przedziałach $(-\infty, -\sqrt{t_1})$ i $(\sqrt{t_1}, +\infty)$.

f jest wypukła w przedziałach $(-\sqrt{t_1}, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \sqrt{t_1})$.

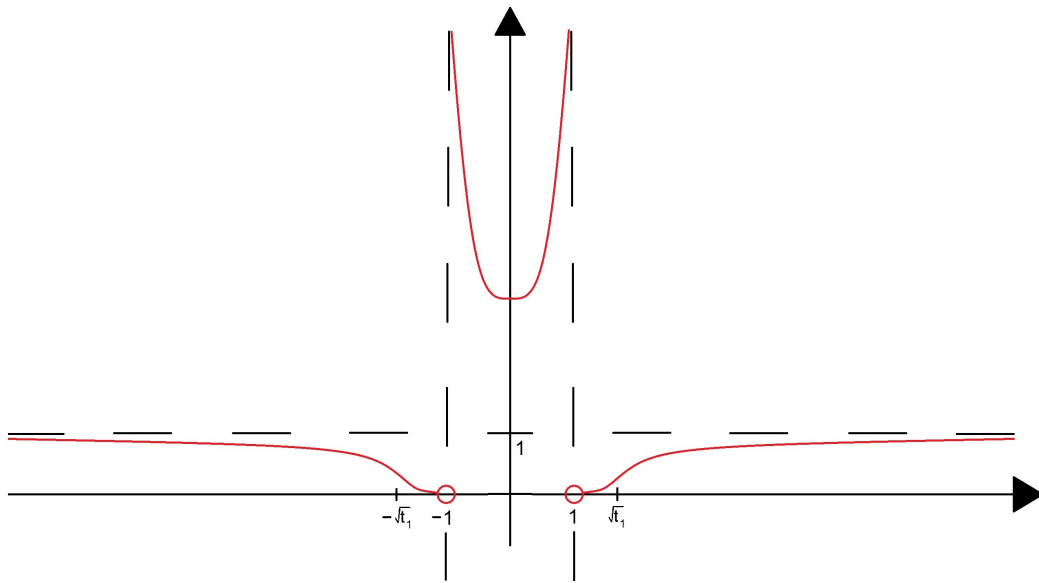
$$f(\sqrt{t_1}) = f(-\sqrt{t_1}) = e^{\frac{1}{1-t_1}} = e^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = e^{\frac{3}{2}} \approx 0,16.$$

$(\sqrt{t_1}, f(\sqrt{t_1}))$ i $(-\sqrt{t_1}, f(-\sqrt{t_1}))$ są punktami przegięcia wykresu f .

(6)

x	$(-\infty, -\sqrt{t_1})$	$-\sqrt{t_1}$	$(-\sqrt{t_1}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{t_1})$	$\sqrt{t_1}$	$(\sqrt{t_1}, +\infty)$
f'	-	-	-	X	-	0	+	X	+	+	+
f''	-	0	+	X	+	+	+	X	+	0	-
f	1 ↘	$e^{\frac{3}{1-\sqrt{7}}}$	↘ ₀	X	$+\infty$ ↘	e	↘ ₊ $+\infty$	X	0 ↗	$e^{\frac{3}{1-\sqrt{7}}}$	↗ ₁

(7)



Rysunek 7: Wykres funkcji z przykładu 179

(8) $W_f = (0, 1) \cup \langle e, +\infty \rangle$.Z wykresu f można też zauważyć, że f jest funkcją parzystą.Rzeczywiście, $f(-x) = e^{\frac{1}{1-(-x)^2}} = e^{\frac{1}{1-x^2}} = f(x) \forall x \in D_f$.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

9 CAŁKA NIEOZNACZONA

$I \subset \mathbb{R}$ przedział.

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja.

Definicja.

Funkcję $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

nazywamy funkcją pierwotną funkcji f .

Twierdzenie

Niech $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną funkcji f . Wtedy każda funkcja $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest również pierwotną funkcji f i wszystkie jej pierwotne są takiej postaci.

Twierdzenie

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale I , to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Przykład 180 Funkcja $F(x) = \sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \cos x$.

Inną funkcją pierwotną do f jest np. funkcja $G(x) = \sin x - 15$.

Przykład 181 Wszystkie pierwotne funkcji $f(x) = 4x^3 - x + 2$ są postaci $F(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Przykład 182 Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = |x|$ jest np. funkcja $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$.

Przykład 183 Funkcja $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ -1, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$ nie ma pierwotnej w dowolnym przedziale zawierającym 0.

Gdyby F była pierwotną funkcji sgn , to spełniałaby warunki:

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & \text{gdy } x > 0 \\ -x + C, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Wtedy prawostronna pochodna $F'_+(0) = 1$, a lewostronna pochodna $F'_-(0) = -1$ i F nie miałaby pochodnej w 0.

Definicja.

Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f .

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R} \text{ i } F'(x) = f(x).$$

Definicja.

Funkcją całkowalną nazywamy funkcję, która posiada pierwotną.

Zbiór funkcji całkowalnych na przedziale I będziemy oznaczać $S(I)$.

Twierdzenie

Niech $f' \in S(I)$. Wtedy

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

UWAGA:

Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną.

Np. $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \cos(x^2) dx$, $\int \frac{1}{\ln x} dx$ nie są funkcjami elementarnymi.

OZNACZENIE

$$\int \frac{f(x)dx}{g(x)} := \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

$$\int dx := \int 1 dx$$

PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU CAŁKOWEGO:

- $\int 0 dx = C$;
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad x > 0$;
 $n = 0 \Rightarrow \int 1 dx = \int dx = x + C$;
 $n = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
 $n = -2 \Rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;
 $n = 1 \Rightarrow \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$;
- $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$;
 $a = e \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$;

- $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + D;$
- $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + D.$

Twierdzenie (Liniowość całki nieoznaczonej)

$f, g \in S(I), \quad c \in \mathbb{R}.$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

UWAGA:

Jeśli $f, g \in S(I)$, to przeważnie

$$(!) \int f(x)g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx;$$

$$(!) \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}.$$

Przykład 184 $\int (x \cdot x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1 \neq (\frac{x^2}{2} + C_2) \cdot (\frac{x^2}{2} + C_3) = \left(\int x dx\right) \cdot \left(\int x dx\right).$

Przykład 185 $\int \frac{x}{x} dx = \int dx = x + C_1 \neq \frac{\frac{x^2}{2} + C_2}{\frac{x^2}{2} + C_3} = \frac{\int x dx}{\int x dx}.$

Twierdzenie (Całkowanie przez części)

$f, g \in C^1(I), \quad \text{Wtedy}$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Dowód:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{czyli}$$

$$f(x)g(x) = \int (f \cdot g)'(x) dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

■

Przykład 186 $\int x \sin x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{array} \right] = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$
 $-x \cos x + \sin x + C$.

Przykład 187 $\int e^x \cos x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = e^x & g = \cos x \\ f = e^x & g' = -\sin x \end{array} \right] = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$
 $= \left[\begin{array}{cc} f' = e^x & g = \sin x \\ f = e^x & g' = \cos x \end{array} \right] = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$

Czyli

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

Inny sposób:

$$\int e^x \cos x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = \cos x & g = e^x \\ f = \sin x & g' = e^x \end{array} \right] = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = \sin x & g = e^x \\ f = -\cos x & g' = e^x \end{array} \right] =$$

 $e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

UWAGA:

Tu wybór którą funkcję różniczkować, a którą całkować nie miał znaczenia.

W przykładzie 186 tak!

UWAGA:

Niekonsekwentne całkowanie przez części skończyłoby się w przykładzie 187 niepowodzeniem:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = \sin x & g = e^x \\ f = -\cos x & g' = e^x \end{array} \right] = e^x \cos x - e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

 $= \int e^x \cos x dx.$

Przykład 188 $\int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = \sin x & g = \sin x \\ f = -\cos x & g' = \cos x \end{array} \right] = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx =$
 $= \dots =$

$$= \left[\begin{array}{cc} f' = \cos x & g = \cos x \\ f = \sin x & g' = -\sin x \end{array} \right] = -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \int \sin^2 x dx$$

i wróciliśmy do punktu wyjścia. Zróbmy to inaczej:

$$\dots = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx =$$

 $-\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx.$

Zatem

$$2 \int \sin^2 x dx = x - \sin x \cos x \Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C.$$

Przykład 189 $\int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{cc} f' = e^x & g = x^2 \\ f = e^x & g' = 2x \end{array} \right] = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$

$$= \begin{bmatrix} f' = e^x & g = x \\ f = e^x & g' = 1 \end{bmatrix} = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Przykład 190 $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \begin{bmatrix} f' = 1 & g = \ln x \\ f = x & g' = \frac{1}{x} \end{bmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx =$
 $= x \ln x - x + C.$

Twierdzenie (Całkowanie przez podstawienie)

Niech $I, J \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami,

$g : I \longrightarrow J$ funkcja klasy C^1 ,

$f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ciągła.

Wtedy $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$, gdzie $t = g(x)$.

Dowód:

$t = g(x)$.

f ma pierwotną $F \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) = F(g(x)) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int f(t) dt = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$
 $= f(g(x)) \cdot g'(x).$

■

Przykład 191 $\int (3x - 1)^5 dx = \begin{bmatrix} t = 3x - 1 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{bmatrix} = \int t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{3} \frac{t^6}{6} + C = \frac{(3x-1)^6}{18} + C.$

Przykład 192 $\int \sin 2x dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{bmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C =$
 $= -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Inny sposób:

$$\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x \cos x dx = \begin{bmatrix} f' = \cos x & g = \sin x \\ f = \sin x & g' = \cos x \end{bmatrix}$$

$$= 2 \sin^2 x - 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \sin^2 x - \int \sin 2x dx.$$

Stąd

$$2 \int \sin 2x dx = 2 \sin^2 x \Rightarrow \int \sin 2x dx = \sin^2 x + C.$$

Zauważmy, że $-\frac{1}{2} \cos 2x \neq \sin^2 x$ (np. $x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \neq 0 = \sin^2 x$).

Pytanie: Co jest nie tak?

Przykład 193 $\int \frac{12x^3 - 3x^2}{3x^4 - x^3 + 12} dx = \begin{bmatrix} t = 3x^4 - x^3 + 12 \\ dt = (12x^3 - 3x^2) dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |3x^4 - x^3 + 12| + C.$

Przykład 194 $\int (\sin^5 x) dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right] =$

$$-\int (1 - t^2)^2 dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\int dt + 2\int t^2 dt - \int t^4 dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

Przykład 195

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \\ e^x = t^2 + 1 \end{array} \right] = 2 \int \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C.$$

Sprawdzenie:

$$F(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}.$$

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x = \frac{2e^x}{(e^x - 1 + 1)2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \quad OK.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Aby scałkować funkcję wymierną przedstawiamy ją w postaci sumy wielomianu (jeśli nie jest właściwa) i skończonej liczby ułamków prostych. Wielomiany potrafimy całkować.

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - a \\ dt = dx \end{array} \right] = A \int \frac{dt}{t} = A \ln |t| + C = A \ln |x - a| + C,$$

gdzie $A, a \in \mathbb{R}$, C -dowolna stała.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - a \\ dt = dx \end{array} \right] = A \int \frac{dt}{t^n} = A \cdot \frac{1}{(1-n)(t^{n-1})} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie $B, c, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \Delta = p^2 - 4q < 0$.

Niech $I_1^n = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx$, $I_2^n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Wystarczy teraz policzyć całki I_1^n i I_2^n :

$$I_1^n = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p) dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + C_1 =$$

$$-\frac{1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + C_1,$$

$$I_2^n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^n \left[\left(\frac{t}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^n} = \left[\begin{array}{l} u = \frac{t}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \\ dt = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} du \end{array} \right] = \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$$

$$\text{Zatem } I_2^n = \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{du}{(u^2+1)^n} = \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} I_3^n,$$

$$\text{gdzie } I_3^n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

$$\text{Dla } n = 1: I_3^n = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C_3.$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } n \geq 2: I_3^n &= \int \frac{du}{(u^2+1)^n} = \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^n} du = \int \frac{du}{(u^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2} \int u \cdot \frac{2u}{(u^2+1)^n} du = \\ &= \left[\begin{array}{ll} f = u & g' = \frac{2u}{(u^2+1)^n} \\ f' = 1 & g = -\frac{1}{(n-1)(u^2+1)^{n-1}} \end{array} \right] = I_3^{n-1} - \frac{1}{2} \left[-\frac{u}{(n-1)(u^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} I_3^{n-1} \right] = \\ &= \frac{2n-2-1}{2(n-1)} I_3^{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{u}{(u^2+1)^{n-1}} = \frac{2n-3}{2n-2} I_3^{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{u}{(u^2+1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór rekurencyjny

$\begin{aligned} I_3^n &= \frac{2n-3}{2n-2} I_3^{n-1} + \frac{1}{2n-2} \frac{u}{(u^2+1)^{n-1}} \\ I_3^1 &= \operatorname{arctg} u + C_3 \end{aligned}$
--

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Przykład 196 $\int \frac{x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 - 2}{x^4 - 1} dx \stackrel{\text{Przykład 41}}{=} \int x dx + \int dx + \int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx \stackrel{\text{Przykład 42}}{=} \\ = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \\ = \left[\begin{matrix} t_1 = x-1 & t_2 = x+1 \\ dt_1 = dx & dt_2 = dx \end{matrix} \right] = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dt_1}{t_1} + \int \frac{dt_2}{t_2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \left[\begin{matrix} t_3 = x^2+1 \\ dt_3 = 2x dx \end{matrix} \right] = \\ = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \ln|x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{dt_3}{t_3} + \arctg x = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C.$

Przykład 197 $\int \frac{5x^3 + 21x^2 + 23x + 5}{x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8} dx \stackrel{\text{Przykład 43}}{=} 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^3} = \left[\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix} \right] = \\ = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$

Przykład 198 $\int \frac{2x^3 - x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} dx \stackrel{\text{Przykład 44}}{=} \int \frac{2x-3}{x^2+x+1} dx + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \\ = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - 4 \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \\ = \ln(x^2+x+1) - 4 \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} = \left[\begin{matrix} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{matrix} \right] = \\ \stackrel{x^2+x+1>0}{=} \ln(x^2+x+1) - 4 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = \ln(x^2+x+1) - 4 \int \frac{dt}{\frac{3}{4} \left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} + \int \frac{dt}{\frac{9}{16} \left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} = \\ = \left[\begin{matrix} u = \frac{2t}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du \end{matrix} \right] = \ln(x^2+x+1) - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{u^2+1} + \frac{16}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \\ = \ln(x^2+x+1) - \frac{8\sqrt{3}}{3} \arctg u + \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^2} du = \\ = \ln(x^2+x+1) - \frac{8\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{du}{u^2+1} - \frac{4\sqrt{3}}{9} \int u \cdot \frac{2udu}{(u^2+1)^2} = \left[\begin{matrix} f = u & g' = \frac{2u}{(u^2+1)^2} \\ f' = 1 & g = -\frac{1}{u^2+1} \end{matrix} \right] = \\ = \ln(x^2+x+1) - \frac{8\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{8\sqrt{3}}{9} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \left(-\frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} \right) = \\ = \ln(x^2+x+1) + \frac{(-24+8-4)\sqrt{3}}{9} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{(2x+1)^2}{3} + 1} + C = \\ = \ln(x^2+x+1) - \frac{20\sqrt{3}}{9} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{3x^2+3x+3} + C.$

Całkowanie wybranych funkcji niewymiernych

Twierdzenie

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C;$
- (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$
- (3) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C;$
- (4) $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2} a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$

Dowód:

Ad (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = at \\ dx = a dt \end{array} \right] = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \frac{a}{|a|} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \operatorname{sgn} a \cdot \arcsin \frac{x}{a} + C = \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$$

Ad (2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \left[\begin{array}{l} t = x + \sqrt{x^2 + a} \text{ I podstawienie Eulera} \\ t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a \\ x = \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{a}{t} \right) \\ \sqrt{x^2 + a} = t - x = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t} \\ dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{t^2} \right) dt = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{t^2 + a}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + a}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C =$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

Ad (3)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \stackrel{(1)}{=} a^2 \arcsin \frac{x}{|a|} - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ f' = 1 & g = -2\sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right] = a^2 \arcsin \frac{x}{|a|} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{|a|} + x\sqrt{a^2 - x^2} \implies \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Ad (4)

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a}} \\ f' = 1 & g = 2\sqrt{x^2 + a} \end{array} \right] = x \cdot \sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$2 \int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| \implies$$

$$\implies \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2} a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

UWAGA:

Niech $P(x) = Ax^2 + Bx + C$. $A > 0$ lub ($A < 0$ i $B^2 - 4AC > 0$).Wtedy po zapisaniu $P(x)$ w postaci kanonicznej $A(x + \frac{B}{2A})^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ da się sprowadzić do całki (1), gdy $A < 0$ lub do całki (2), gdy $A > 0$. $\int \sqrt{P(x)} dx$ da się sprowadzić do całki (3), gdy $A < 0$ lub do całki (4), gdy $A > 0$.

Przykład 199 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (4 - 4x + x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x - 2)^2}} = \left[\begin{array}{l} t = x - 2 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{5 - t^2}} \stackrel{(1)}{=}$

$$= \arcsin \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \arcsin \frac{x - 2}{\sqrt{5}} + C.$$

Przykład 200 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-2x+\frac{5}{2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}} = \left[\frac{t = x - \frac{1}{2}}{dt = dx} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \stackrel{(2)}{=} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{5}{4}} \right| + C.$

Przykład 201 $\int \sqrt{2-5x-9x^2} dx = \int \sqrt{\frac{97}{36} - \left(\frac{5}{6} + 3x\right)^2} dx = \left[\frac{t = 3x + \frac{5}{6}}{dt = 3dx} \right] = \frac{1}{3} \int \sqrt{\frac{97}{36} - t^2} dt \stackrel{(3)}{=} \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{97}{72} \arcsin \frac{6}{\sqrt{97}} t + \frac{t}{2} \sqrt{\frac{97}{36} - t^2} \right) + C = \frac{1}{3} \left[\frac{97}{72} \arcsin \left(\frac{18}{\sqrt{97}} x + \frac{5}{\sqrt{97}} \right) + \left(\frac{3}{2} x + \frac{5}{12} \right) \sqrt{2-5x-9x^2} \right] + C.$

Przykład 202 $\int \sqrt{3x^2+9x} dx = \int \sqrt{3} \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} dx = \left[\frac{t = x + \frac{3}{2}}{dt = dx} \right] = \sqrt{3} \int \sqrt{t^2 - \frac{9}{4}} dt \stackrel{(4)}{=} \\ = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{t^2 - \frac{9}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{9}{4} \right) \cdot \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{9}{4}} \right| \right) + C = \\ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x} \right| + C.$

Całkowanie wybranych funkcji trygonometrycznych

Twierdzenie

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

Dowód:

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} f = \sin^{n-1} x & g' = \sin x \\ f' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x & g = -\cos x \end{array} \right] = \\ = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx.$$

Stąd

$$n \cdot \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx \implies \int \sin^n x dx = \\ = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^n \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[\frac{t = x + \frac{\pi}{2}}{dt = dx} \right] = \int \cos^n t dt = -\frac{1}{n} \cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} t dt = \\ = -\frac{1}{n} \cos^{n-1} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

■

UWAGA:

Wzór rekurencyjny pozwala nam na policzenie całki w każdym przypadku, ponieważ

dla $n = 0$:

$$\int \sin^0 x dx = \int dx = x + C,$$

$$\int \cos^0 x dx = \int dx = x + C;$$

dla $n = 1$:

$$\int \sin^1 x dx = \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos^1 x dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Jednak dla n nieparzystych nie ma potrzeby korzystania z tych wzorów (patrz przykład 194).

Przykład 203 $\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx =$
 $= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = -\int (1 - t^2)^2 \cdot t^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x +$
 $+\frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

Przykład 204 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx = \int \cos^4 x dx - \int \cos^6 x dx$

i dalej ze wzoru rekurencyjnego.

Definicja.

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ s zmiennych $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ k_1 + \dots + k_s \leq n}} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_s^{k_s},$$

gdzie $a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \in \mathbb{R} \forall k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ k_1 + \dots + k_s \leq n$,

przy czym $\exists \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_s = n$.

Przykład 205 $W(x, y, z) = 2x^2y^3 - 1,8xy^2 + \pi x^4 + (\sqrt{2} - 1)x^2y^2 - \frac{1}{3}y^2z - 1000xy^2z^2 + 11$
 jest wielomianem stopnia 5 trzech zmiennych x, y, z .

Przykład 206 $W(x, y) = x^3 - 3x^2y + exy^2 - \sqrt[3]{10}y^3 - 12x^2 - \frac{1}{4}xy + y^2 + 13x - 4y + 99$
 jest wielomianem stopnia 3 dwóch zmiennych x, y .

UWAGA:

Niech $L(u, v, w, z)$, $M(u, v, w, z)$ będą wielomianami zmiennych u, v, w, z .

Złożenie funkcji trygonometrycznych z funkcją wymierną $\frac{L(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)}{M(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)}$ całkujemy stosując podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (tzw. podstawienie uniwersalne), które sprowadza nam wyjściową całkę do całki z funkcji wymiernej.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \implies x = 2 \arctgt \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1 - t^2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Przykład 207

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right] = \int \frac{1}{2 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2} = \int \frac{2dt}{2 + 2t^2 - 1 + t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} u = t\sqrt{3} \\ du = \sqrt{3}dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg u + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg(t\sqrt{3}) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C. \end{aligned}$$

Przykład 208

$$\int \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 + \sin x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1 - t^2}{2t} \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right] = \int \frac{1 + \frac{1 - t^2}{2t}}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2} = \int \frac{\frac{2t + 1 - t^2}{2t}}{\frac{1 + t^2 + 2t}{1 + t^2}} dt = - \int \frac{t^2 - 2t - 1}{t(t + 1)^2} dt = \dots$$

$$\frac{t^2 - 2t - 1}{t(t + 1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} + \frac{C}{(t + 1)^2} \implies t^2 - 2t - 1 = A(t + 1)^2 + Bt(t + 1) + Ct.$$

$$t = 0 \implies -1 = A.$$

$$t = -1 \implies 2 = -C \implies C = -2.$$

Współczynnik przy t^2 : $1 = A + B \implies B = 1 - A = 2$.

$$\begin{aligned} \dots &= \int \frac{1}{t} dt - 2 \int \frac{1}{t + 1} dt + 2 \int \frac{1}{(t + 1)^2} dt = \ln |t| - 2 \ln |t + 1| - \frac{2}{t + 1} + C = \ln \frac{|t|}{(t + 1)^2} - \frac{2}{t + 1} + C = \\ &= \ln \frac{\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2} - \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

UWAGA:

Nie do każdej całki tej postaci warto stosować to podstawienie!

Przykład 209

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right] = \int \frac{4t^2}{(1 - t^2)^2} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = 8 \int \frac{t^2 dt}{(t - 1)^2 (t + 1)^2 (t^2 + 1)} \text{ i trzeba długo liczyć.}$$

Tymczasem:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

UWAGA:

Niech $L(u, v, w)$, $M(u, v, w)$ będą wielomianami zmiennych u, v, w .

Złożenie funkcji trygonometrycznych z funkcją wymierną $\frac{L(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)}{M(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)}$ całkujemy stosując podstawienie $t = \operatorname{tg} x$, które sprowadza nam wyjściową całkę do całki z funkcji wymiernej (prostszej

niż przy zastosowaniu podstawienia uniwersalnego).

$$t = \operatorname{tg} x \implies x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Przykład 210

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+2\cos^2 x} &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2+2} = \int \frac{dt}{3+t^2} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3}u \\ dt = \sqrt{3}du \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{3}du}{3+3u^2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} u + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

10 CAŁKA OZNACZONA

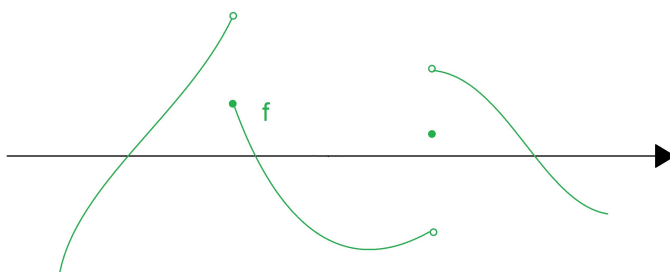
W celu zdefiniowania całki oznaczonej z funkcji na przedziale, rozważymy trzy, coraz ogólniejsze, przypadki:

(1) $f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \langle 0; \infty \rangle$ funkcja ciągła;

(2) $f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ciągła;

(3) $f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja kawałkami ciągła,

tj. $\exists \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} \subset \langle a, b \rangle$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ i $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ f jest ciągła na przedziale (x_k, x_{k+1}) , przy czym granice jednostronne w tych punktach istnieją i są właściwe (czyli są liczbami skończonymi).

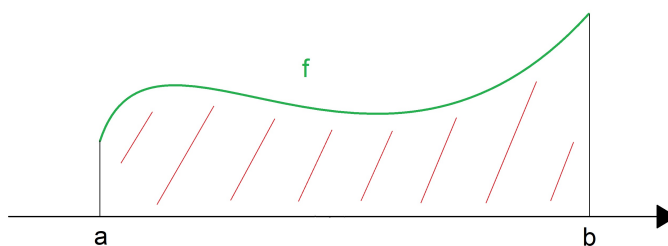


Rysunek 1: Funkcja kawałkami ciągła

Definicja.

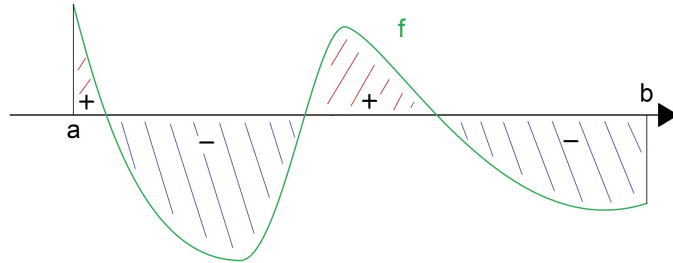
Całkę oznaczoną (Riemanna) z funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle$ oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$ i definiujemy jako:

(1) pole obszaru ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i wykresem funkcji f ;



Rysunek 2: Całka oznaczona z funkcji ciągłej nieujemnej

(2) różnicę między sumą pól obszarów położonych nad osią Ox i pod wykresem f ($\{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) > 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$), a sumą pól obszarów położonych pod osią Ox i nad wykresem f ($\{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) < 0, f(x) \leq y \leq 0\}$);



Rysunek 3: Całka oznaczona z funkcji ciągłej

(3) sumę całek po przedziałach, na których funkcja jest ciągła:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

UWAGA:

Powyższa definicja jest nieformalna, ale dla nas wystarczająca. Również klasę funkcji określonych na przedziale $\langle a, b \rangle$, dla których istnieje całka oznaczona, zwanych funkcjami całkowalnymi, można jeszcze rozszerzyć. Jednak, dla naszych potrzeb, zawężymy ją do funkcji kawałkami ciągłych na $\langle a, b \rangle$ i będziemy oznaczać $S(\langle a, b \rangle)$.

UWAGA:

Przyjmujemy, że $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ oraz } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Własności całki oznaczonej:

Twierdzenie (Liniowość)

$f, g : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła, $c \in \mathbb{R}$ wtedy

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie (Addytywność względem przedziału całkowania)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła, $a < c < b$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie

$f, g : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła, wtedy

$$(1) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

$$(2) \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right) \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right); \text{ NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA-BUNIAKOWSKIEGO}$$

$$(3) f \leq g, \text{ tzn. } \forall x \in \langle a; b \rangle f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Twierdzenie (całkowe o wartości średniej)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Wtedy $\exists c \in (a; b)$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Twierdzenie Newtona-Leibniza (I główne twierdzenie rachunku całkowego)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła, $F : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dowolna pierwotna funkcji f .

Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

OZNACZENIE $\left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Przykład 211 $\int_0^1 (x^5 - 4x^3 + 3) dx = \left[\frac{x^6}{6} - x^4 + 3x \right]_0^1 = \left(\frac{1^6}{6} - 1^4 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^6}{6} - 0^4 + 3 \cdot 0 \right) = \frac{1}{6} - 1 + 3 = \frac{13}{6}.$

Przykład 212 $\int_{-1}^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-1}^2 = -e^{-2} - (-e^1) = e - \frac{1}{e^2}.$

Twierdzenie (Całkowanie przez części)

$f, g \in C^1(\langle a; b \rangle)$. Wtedy

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Przykład 213 $\int_0^{\ln 3} x e^{-x} dx = \left[\begin{matrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{matrix} \right] = \left[-x \cdot e^{-x} \right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} -e^{-x} dx =$
 $= -\ln 3 \cdot e^{-\ln 3} + 0 \cdot e^0 + \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx = -\ln 3 e^{\ln 3^{-1}} - e^{-x} \Big|_0^{\ln 3} = -(\ln 3) \cdot \frac{1}{3} - e^{-\ln 3} + e^0 =$
 $= -\frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \ln 3.$

Przykład 214 $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \left[\begin{matrix} f' = 1 & g = \ln^2 x \\ f = x & g' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \end{matrix} \right] = \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx =$

$$\begin{aligned}
&= e^2 \ln^2 e^2 - 1 \cdot \ln^2 1 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx = e^2 \cdot 4 - 0 - 2 \cdot \int_1^{e^2} 1 \cdot \ln x dx = \begin{bmatrix} f' = 1 & g = \ln x \\ f = x & g' = \frac{1}{x} \end{bmatrix} = \\
&= 4e^2 - 2 \left[x \cdot \ln x \right]_1^{e^2} + 2 \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = 4e^2 - 2e^2 \ln e^2 + 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 2 \int_1^{e^2} dx = 4e^2 - 4e^2 + 0 + 2x \Big|_1^{e^2} = 2e^2 - 2.
\end{aligned}$$

Twierdzenie (Całkowanie przez podstawianie)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła,

$g : \langle \alpha; \beta \rangle \longrightarrow \langle a; b \rangle$ klasy C^1 ,

$g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Wtedy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Przykład 215

$$\int_2^5 \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\begin{matrix} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int_3^{24} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_3^{24} = \frac{1}{2} \ln 24 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{24}{3} = \frac{1}{2} \ln 2^3 = \frac{3}{2} \ln 2.$$

Przykład 216

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left[\begin{matrix} x = 2 \cos t \\ t = \arccos \frac{x}{2} \\ dx = -2 \sin t dt \end{matrix} \right] = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{4-4\cos^2 t} \cdot (-2 \sin t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin t \cdot (-2 \sin t) dt = \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \left[\begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix} \right] = \\
&= 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi} \cos u du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 - \sin u \Big|_0^{\pi} = \pi - \sin \pi + \sin 0 = \pi - 0 + 0 = \pi.
\end{aligned}$$

Można też zastosować gotowy wzór:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{(3)}{=} \left[\frac{4}{2} \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} \right]_0^2 = 2 \arcsin 1 + \sqrt{0} - 2 \arcsin 0 - 0 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \pi.$$

Twierdzenie (II główne twierdzenie rachunku całkowego)

$c \in \langle a; b \rangle$.

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła. Wtedy funkcja zadana wzorem $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ jest różniczkowalna w przedziale $\langle a; b \rangle$ i jej pochodna wyraża się wzorem

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle.$$

Przykład 217 $F(x) = \int_0^x \cos t dt = \sin t \Big|_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x.$

$$F'(x) = \cos x.$$

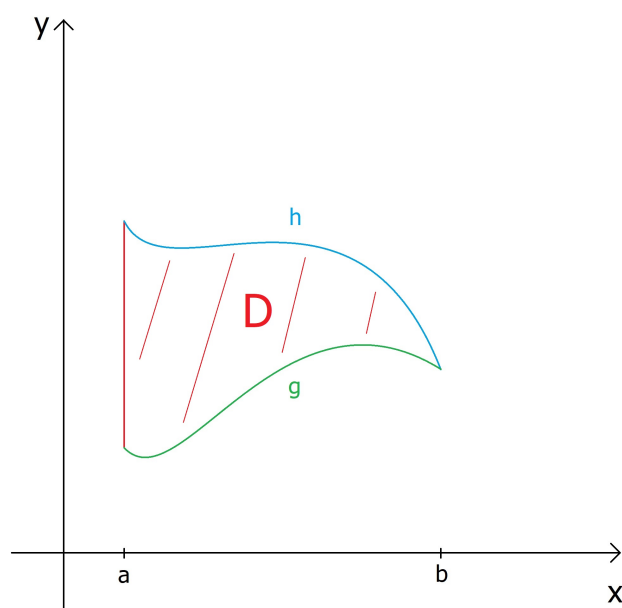
Zastosowanie całki oznaczonej w geometrii:**Twierdzenie**

$g, h : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągle.

$\forall x \in \langle a; b \rangle \ h(x) \geq g(x)$.

Wtedy pole obszaru ograniczonego prostymi $x = a, x = b$ i wykresami funkcji g i h wynosi

$$\int_a^b (h(x) - g(x)) dx.$$



Rysunek 4: Obszar ograniczony wykresami funkcji

Przykład 218 Obliczyć pole koła o promieniu $r > 0$.

Koło o promieniu r ma takie samo pole niezależnie od środka, więc można go umiejscowić symetrycznie względem środka układu współrzędnych. Jego brzeg ma wówczas równanie $x^2 + y^2 = r^2$.

Można go rozbić na dwa półokręgi będące wykresami funkcji

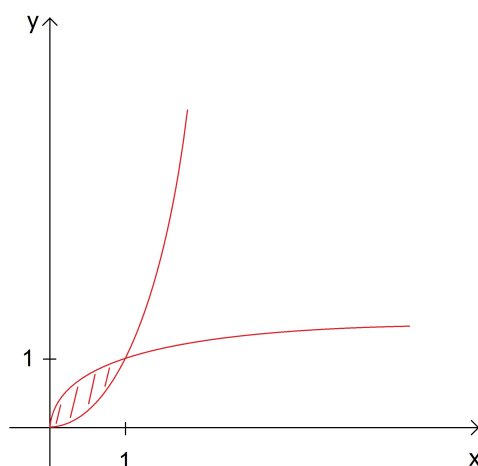
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ i } g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Zatem pole koła

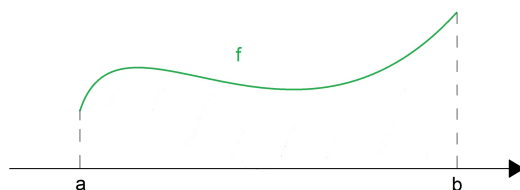
$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^r \left[\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2}) \right] dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{(3)}{=} 2 \left(\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \right) \Big|_{-r}^r = \\ &= r^2 \arcsin 1 + r \cdot 0 - r^2 \arcsin(-1) - \frac{-r}{2} \cdot 0 = r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Przykład 219 Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$.

Znajdujemy punkty wspólne wykresu:



Rysunek 5: Obszar ograniczony krzywymi z przykładu 219



Rysunek 6: Krzywa będąca wykresem funkcji

$$x^2 = \sqrt{x} \iff (\text{patrz przykład 109}) \quad x = 0 \vee x = 1.$$

Zatem

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Twierdzenie (długość krzywej)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow R$ będzie funkcją klasy C^1 . Wtedy długość krzywej $K = \{(x, f(x)) : x \in \langle a; b \rangle\}$ będącej wykresem f wyraża się wzorem:

$$|K| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Przykład 220 Obliczyć długość okręgu o promieniu r .

Aby obliczyć długość okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ wystarczy wyznaczyć długość półokręgu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

i pomnożyć ją przez 2:

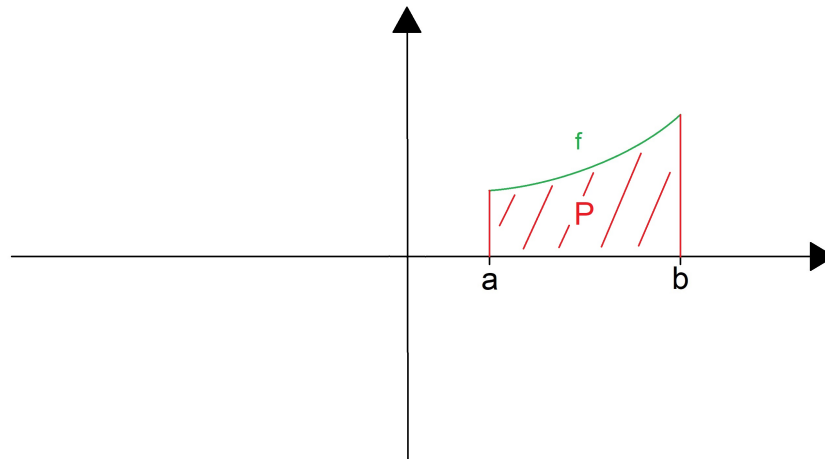
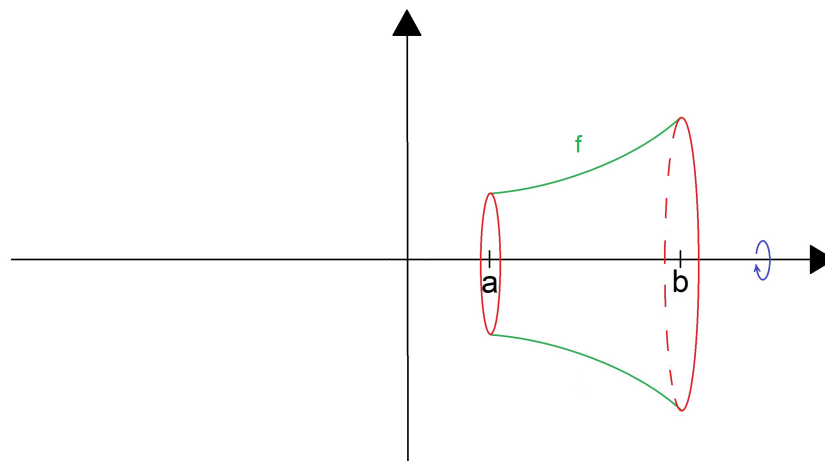
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}|K| &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} dx = 2r \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \stackrel{(1)}{=} \\ &= 2r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-r}^r = 2r (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2r \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2\pi r.\end{aligned}$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Rysunek 1: Figura P Rysunek 2: Obrót wokół osi Ox

Twierdzenie (Objętość bryły obrotowej)

$f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \langle 0; \infty \rangle$ ciągła.

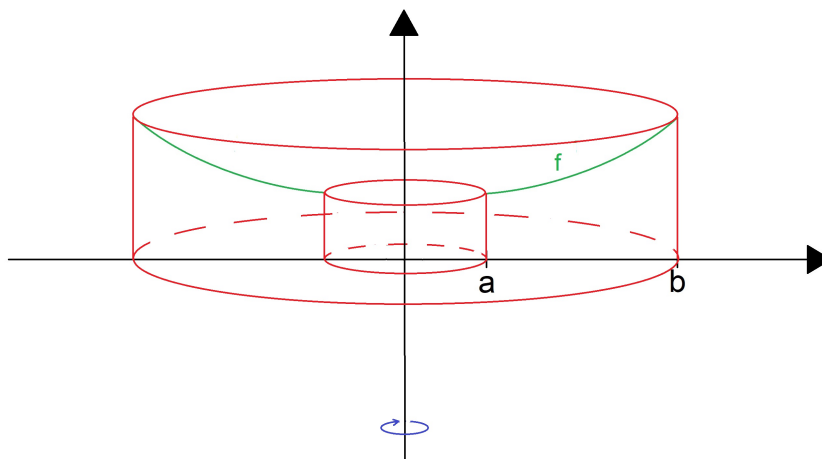
Niech P oznacza figurę ograniczoną przez proste $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i wykres funkcji $y = f(x)$.

Wtedy objętość bryły B_x powstałej przez obrót figury P dookoła osi Ox wyraża się wzorem

$$V_{B_x} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Jeśli ponadto $a \geq 0$, to objętość bryły powstałej przez obrót figury P dookoła osi Oy wyraża się wzorem

$$V_{B_y} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Rysunek 3: Obrót wokół osi Oy

Przykład 221 Obliczyć objętość kuli o promieniu r .

Kula powstaje przez obrót półkuli pod wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$ dookoła osi Ox . Stąd

$$\begin{aligned} V_k &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 \int_{-r}^r dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^r - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r = \\ &= \pi r^3 - (-\pi r^3) - \pi \frac{r^3}{3} - (-\pi \frac{r^3}{3}) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Można też policzyć objętość kuli mnożąc przez dwa objętość półkuli, która powstaje przez obrót ćwierćkuli pod wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$ dookoła osi Oy .

Stąd

$$\begin{aligned} V_k &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx = -2\pi \int_0^r -2x\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[t = r^2 - x^2 \right] = -2\pi \int_{r^2}^0 \sqrt{t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{r^2} \sqrt{t} dt = 2\pi \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r^2} = \frac{4}{3}\pi t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r^2} = \frac{4}{3}\pi (r^3 - 0) = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Twierdzenie (Pole powierzchni bryły obrotowej)

Niech $f : \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Wtedy pole powierzchni Σ_x powstałej przez obrót wykresu funkcji f dookoła osi Ox wyraża się wzorem

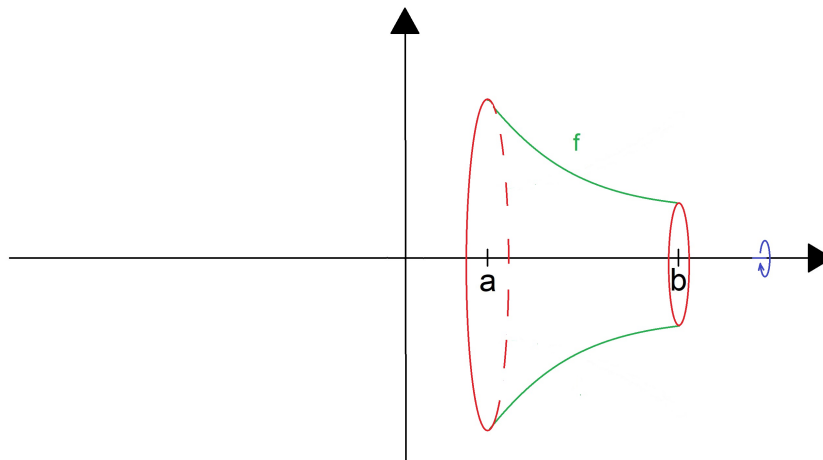
$$S_{\Sigma_x} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Jeśli ponadto $a \geq 0$, to pole powierzchni Σ_y powstałej przez obrót wykresu funkcji f dookoła osi Oy wyraża się wzorem

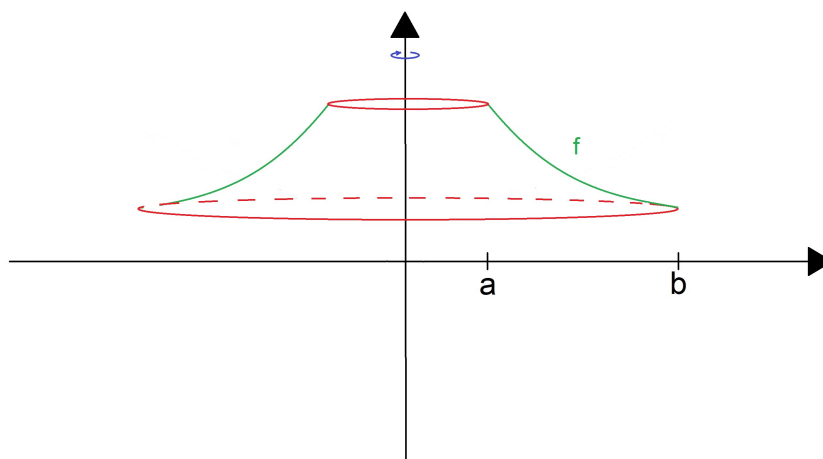
$$S_{\Sigma_y} = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Przykład 222 Obliczyć pole powierzchni sfery o promieniu r .

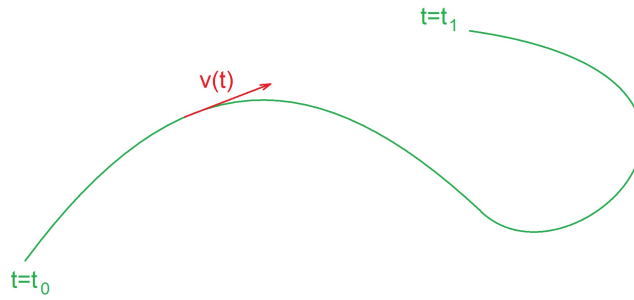
Sfera powstaje przez obrót wykresu funkcji: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$ dookoła osi Ox .



Rysunek 4: Obrót wokół osi Ox



Rysunek 5: Obrót wokół osi Oy



Rysunek 6: Droga przebyta przez punkt materialny

Stąd

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$S_s = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

Można też policzyć pole sfery mnożąc przez dwa pole powierzchni półsfery powstałej przez obrót wykresu funkcji: $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $0 \leq x \leq r$ dookoła osi Oy .

Stąd

$$S_s = 2 \cdot 2\pi \int_0^r x \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} dx = 4\pi \int_0^r x \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} dx = 4\pi r \int_0^r \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} dx = -2\pi r \int_0^r \frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} dx =$$

$$= \left[t = r^2 - x^2 \right]_{dt = -2x dx} = -2\pi r \int_{r^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 4\pi r \int_0^{r^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 4\pi r \sqrt{t} \Big|_0^{r^2} = 4\pi r^2.$$

Niektóre zastosowania całki oznaczonej w fizyce:

Twierdzenie

Jeżeli punkt materialny porusza się po krzywej na płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną prędkością $V(t)$ zależącą od czasu $t \in \langle t_0; t_1 \rangle$, to droga przebyta przez ten punkt od chwili t_0 do t_1 wynosi:

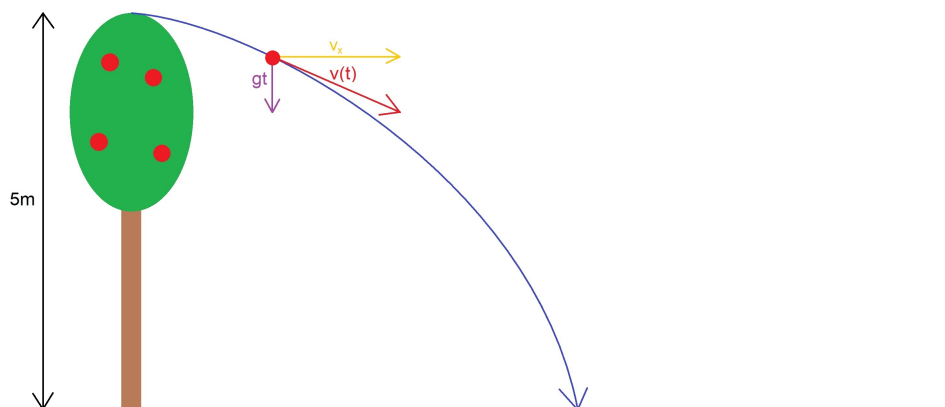
$$\boxed{L = \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt} \quad \text{DROGA}$$

Przykład 223 Janek wdrapał się na jabłoń na wysokość 5 m nad ziemią i rzucił stamtąd jabłkiem w kierunku poziomym z prędkością $6 \frac{m}{s}$. Przyjmując, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{m}{s^2}$ i pomijając opór powietrza, oblicz drogę jaką przebyło jabłko w powietrzu.

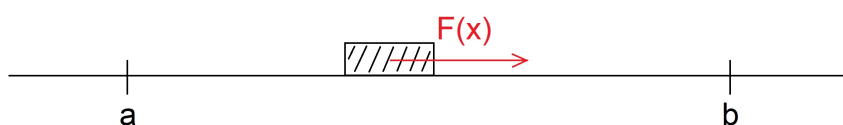
Najpierw obliczymy czas lotu jabłka t_1 , który zależy tylko od pionowej składowej prędkości. Zatem

$$\int_0^{t_1} g t dt = 5 \implies g \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_1} = 5 \implies 10 \frac{t_1^2}{2} = 5 \implies t_1^2 = 1 \implies t_1 = 1s.$$

Z tw. Pitagorasa wartość prędkości jabłka w chwili t wynosi:



Rysunek 7: Droga jabłka



Rysunek 8: Praca wykonana przez siłę

$$V(t) = \sqrt{6^2 + g^2 t^2} = \sqrt{36 + 100t^2},$$

czyli

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{36 + 100t^2} dt = 10 \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{36}{100}} dt \stackrel{(4)}{=} 10 \left[\frac{1}{2} t \sqrt{t^2 + \frac{36}{100}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{100} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{36}{100}} \right| \right]_0^1 = \\ &= 5 \sqrt{\frac{136}{100}} + \frac{9}{5} \ln \left| 1 + \sqrt{\frac{136}{100}} \right| - \frac{9}{5} \ln \left| \frac{6}{10} \right| = \sqrt{34} + \frac{9}{5} \ln \frac{1+2\sqrt{34}}{\frac{6}{10}} = \left(\sqrt{34} + \frac{9}{5} \ln \frac{5+\sqrt{34}}{3} \right) m \approx 8,14m. \end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeżeli wzdłuż osi Ox na ciało działa zmienna siła $F(x)$ zależna od położenia ciała $x \in \langle a; b \rangle$, to praca wykonana przez tę siłę od punktu a do punktu b wynosi:

$$\boxed{W = \int_a^b F(x) dx} \quad \text{PRACA}$$

Przykład 224 Obliczyć pracę, jaką musi wykonać silnik helikoptera o masie m , aby go wynieść na

wysokość h nad ziemię. Przyjmując: G -stałą grawitacji, M -masę Ziemi, R -promień Ziemi, wiemy, że siła z jaką działamy na helikopter na wysokość x nad ziemią wynosi:

$F(x) = \frac{GMm}{(R+x)^2}$. Stąd poszukiwana wartość pracy wynosi:

$$\begin{aligned} W &= GMm \int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = \left[\begin{matrix} t = R+x \\ dt = dx \end{matrix} \right] = GMm \int_R^{R+h} \frac{dt}{t^2} = GMm \left[-\frac{1}{t} \right]_R^{R+h} = \\ &= GMm \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right) = GMm \frac{-R+R+h}{R(R+h)} = \frac{GMmh}{R(R+h)}. \end{aligned}$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

11 CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Definicja.

$$\left. \begin{array}{l} f : \langle a; +\infty \rangle \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : (-\infty; b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ h : (-\infty; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{funkcje ciągłe}$$

Całkę niewłaściwą (I rodzaju) na przedziale nieograniczonym funkcji f, g, h definiujemy odpowiednio jako

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b g(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^c h(x)dx + \int_c^{+\infty} h(x)dx, \text{ gdzie } c \text{ jest dowolną liczbą.}$$

Jeżeli granica występująca w definicji całki niewłaściwej istnieje i jest liczbą to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną. W przeciwnym wypadku mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Przykład 225 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = 1.$

Całka jest zbieżna.

Przykład 226 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \Big|_1^b =$
 $= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sqrt{b} - 1) = +\infty.$

Całka jest rozbieżna.

Przykład 227 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (\arctg x) \Big|_a^b =$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (\arctg b - \arctg a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Całka jest zbieżna.

Definicja.

$$\left. \begin{array}{l} f : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R} \\ h : \langle a; b \rangle \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{funkcje ciągłe}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \{\pm\infty\}, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \{\pm\infty\}, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) \in \{\pm\infty\}, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Całkę niewłaściwą (II rodzaju) na przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcji f, g, h definiujemy odpowiednio jako

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b g(x)dx$$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx, \text{ gdzie } c \text{ jest dowolną liczbą z przedziału } (a; b).$$

Jeżeli granica występująca w definicji całki niewłaściwej istnieje i jest liczbą to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną. W przeciwnym wypadku mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Przykład 228 $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right] =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_1^{1-t^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\lim_{t \rightarrow 1^-} \sqrt{u} \Big|_1^{1-t^2} = -\lim_{t \rightarrow 1^-} (\sqrt{1-t^2} - 1) = 1.$
 Całka jest zbieżna.

Przykład 229 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-4x+4x^2)}} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 1^-}} \int_s^t \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 1^-}} \int_s^t \frac{-2dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 1 - 2x \\ du = -2dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 1^-}} \int_{1-2s}^{1-2t} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 1^-}} \arcsin u \Big|_{1-2s}^{1-2t} = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 1^-}} (\arcsin(1-2t) - \arcsin(1-2s)) =$
 $= -\frac{1}{2} (\arcsin(-1) - \arcsin(1)) = -\frac{1}{2} (-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$
 Całka jest zbieżna.

Przykład 230 $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^t + \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_s^8 =$
 $= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} (t^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}) + \frac{3}{2} \lim_{s \rightarrow 0^+} (8^{\frac{2}{3}} - s^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 4 = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$
 Całka jest zbieżna.

Przykład 231 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{s \rightarrow 0^+} [-\frac{1}{x}]_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} (-1 + \frac{1}{s}) = +\infty.$
 Całka jest rozbieżna.

Twierdzenie $f : (a; b) \rightarrow \langle 0; +\infty \rangle$ ciągła i $(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad a = -\infty \quad \text{lub} \quad b = +\infty).$

Wtedy pole obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > a, x < b, y \geq 0 \text{ i } y \leq f(x)\}$ wynosi $\int_a^b f(x) dx$.

Przykład 232 $f(x) = \frac{1}{x^2}.$

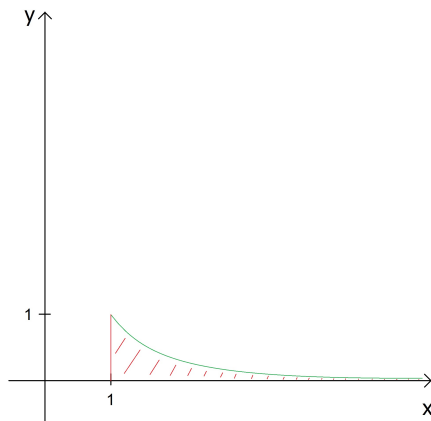
Pole obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 0, y \leq \frac{1}{x^2}\}$ wynosi $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \stackrel{\text{Przykład 225}}{=} 1.$

Przykład 233 $f(x) = \frac{1}{x^2}.$

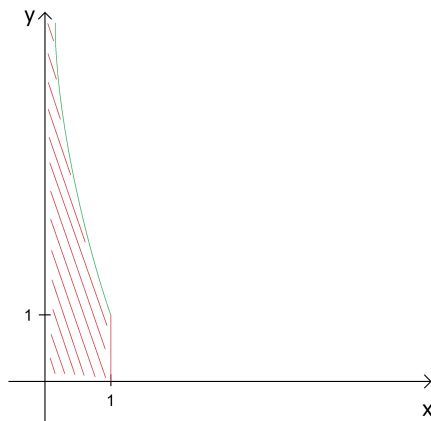
Pole obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x \leq 1, y \geq 0, y \leq \frac{1}{x^2}\}$ wynosi $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \stackrel{\text{Przykład 231}}{=} +\infty$, czyli jest nieskończone.

Przykład 234 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

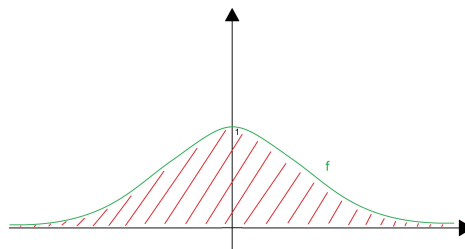
Pole obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$ wynosi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{\text{Przykład 227}}{=} \pi.$



Rysunek 1: Obszar z przykładu 232



Rysunek 2: Obszar z przykładu 233



Rysunek 3: Obszar z przykładu 234

12 SZEREGI LICZBOWE I POTĘGOWE

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem liczbowym. Chcemy policzyć, o ile to możliwe, sumę wszystkich jego (nieskończenie wielu) elementów. W tym celu definiujemy tzw. ciąg sum częściowych o wyrazie ogólnym

$$S_k := a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n.$$

Definicja.

Szeregiem liczbowym nazywamy nieskończoną sumę wyrazów ciągu:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Definicja.

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli ciąg jego sum częściowych jest zbieżny. Granicę ciągu sum częściowych w szeregu zbieżnym nazywamy jego sumą:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k.$$

Jeżeli granicą ciągu sum częściowych jest $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że szereg jest rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$. Jeżeli granica ciągu sum częściowych nie istnieje, to mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Przykład 235 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Czyli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny do 1.

Przykład 236 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = -1 + 1 + (-1) + 1 + \dots$

$$S_k = \begin{cases} -1, & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ 0, & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}.$$

Ciąg (S_k) nie ma granicy, więc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Przykład 237 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n - \ln(n+1)).$

$$S_k = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln k - \ln(k+1) = -\ln(k+1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Czyli $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Jak widać niektóre szeregi są zbieżne, inne nie. Powstaje więc pytanie: jak rozpoznać czy dany szereg jest zbieżny?

Twierdzenie (Warunek konieczny zbieżności szeregu)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Przykład 238 Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, więc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny (por. Przykład 236).

Przykład 239 Ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ zmierza do 1, więc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny.

Przykład 240 Ciąg $a_n = \ln \frac{n}{n+1}$ zmierza do 0, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny (por. Przykład 237).

Twierdzenie (Szereg geometryczny)

Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 q^{n-1}$ jest zbieżny gdy $|q| < 1$, rozbieżny do $+\infty$ gdy $q \geq 1$, a rozbieżny gdy $q \leq -1$.

Ponadto, gdy $|q| < 1$, to

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Twierdzenie (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)

Niech $f : \langle n_0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie funkcją ciągłą i nierosnącą. Wtedy szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ i całka niewłaściwa $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne do $+\infty$.

Przykład 241 Szereg $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny, ponieważ funkcja $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ jest ciągła i nierosnąca

na $\langle 2, +\infty \rangle$ oraz

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \left[\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |t| \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = +\infty. \end{aligned}$$

Twierdzenie Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do $+\infty$ dla $p \leq 1$.

UWAGA:

Na pierwszy rzut oka wydaje się to dziwne, że np. szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, podczas gdy szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Przecież oba są sumami elementów malejących do zera!

Można to jednak wykazać niemal "na palcach":

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 2. \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots \geq \\
&\geq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty.
\end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie jest dobrą ilustracją następującego twierdzenia:

Twierdzenie (Kryterium porównawcze zbieżności szeregów)

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$.

$\forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq |b_n|$. Wtedy

(1) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ też jest zbieżny;

(2) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ też jest rozbieżny.

Definicja.

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Definicja.

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, jeżeli jest zbieżny, ale nie bezwzględnie.

Twierdzenie Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Przykład 242 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ jest zbieżny, bo jest zbieżny bezwzględnie:

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \left| \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}, \text{ a szereg } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ jest zbieżny.}$$

Twierdzenie (Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0, \quad b_n > 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$. Wtedy:

szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny.

Kryterium ilorazowe jest też nazywane kryterium asymptotycznym.

Przykład 243 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+10}$ jest rozbieżny na mocy kryterium porównawczego, bo:

$$\forall n \geq 10 \quad \frac{1}{3n+10} \geq \frac{1}{4n}, \text{ a szereg } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ jest rozbieżny.}$$

Rozbieżność tego szeregu wynika też z kryterium ilorazowego:

$$\frac{\frac{1}{3n+10}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{3n+10} = \frac{1}{3+\frac{10}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \in (0, +\infty), \text{ a szereg } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ jest rozbieżny.}$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Twierdzenie (Kryterium d'Alemberta)

Niech $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny dla $q < 1$ i rozbieżny dla $q > 1$.

Przykład 244 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ jest zbieżny, ponieważ

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Przykład 245 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ jest rozbieżny, ponieważ

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot (n+1) \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Twierdzenie (Kryterium Cauchy'ego)

Niech $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny dla $q < 1$ i rozbieżny dla $q > 1$.

Przykład 246 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n+3}{4n-2} \right)^n$ jest zbieżny, ponieważ

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \left(-\frac{n+3}{4n-2} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{4n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Przykład 247 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$ jest rozbieżny, ponieważ

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^{10}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{10}} = \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1.$$

UWAGA:

Jeśli granica q z kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego wynosi 1, to nic nie można powiedzieć o zbieżności badanego szeregu.

Twierdzenie (Kryterium Leibniza)

Jeżeli $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ b_n \geq b_{n+1} \geq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, to szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

jest zbieżny.

Przykład 248 Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny warunkowo, ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ co, na mocy kryterium Leibniza, daje zbieżność, ale nie bezwzględną, bo szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Definicja.

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Definicja.

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy:

- (1) liczbę 0, gdy szereg ten jest zbieżny tylko w punkcie x_0 ;
- (2) liczbę $R > 0$, gdy szereg ten jest zbieżny bezwzględnie w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$, a rozbieżny w sumie przedziałów $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$;
- (3) $+\infty$, gdy szereg ten jest zbieżny bezwzględnie $\forall x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie Promień zbieżności szeregu potęgowego zawsze istnieje, zatem jest on zbieżny w pewnym przedziale (otwartym, domkniętym, otwarto-domkniętym lub domknięto-otwartym), zwanym przedziałem zbieżności.

Twierdzenie Niech $g_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, $g_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Jeśli któraś z tych granic istnieje, to promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest jej odwrotnością:
 $R = \frac{1}{g_1}$ lub $R = \frac{1}{g_2}$.

UWAGA:

Ponieważ granice te mogą być równe 0^+ lub $+\infty$, przyjmujemy, że $\frac{1}{0^+} = +\infty$ i $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Przykład 249 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

$x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$.

$$g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \implies R = \frac{1}{g} = 1.$$

$x \in (-1, 1) \implies S(x)$ jest bezwzględnie zbieżny,

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \implies S(x)$ jest rozbieżny,

$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ i jest to szereg rozbieżny,

$S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i jest to szereg zbieżny warunkowo (patrz Przykład 248).

Zatem $\langle -1, 1 \rangle$ jest przedziałem zbieżności szeregu.

Przykład 250 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x-5)^n$.

$$x_0 = 5, \quad a_n = n^n.$$

$$g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \implies R = \frac{1}{g} = 0.$$

$S(5) = 0$ i jest to szereg bezwzględnie zbieżny,

$x \neq 5 \implies S(x)$ jest rozbieżny.

Przykład 251 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{n^n}$.

$$x_0 = -3, \quad a_n = \frac{1}{n^n}.$$

$$g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+ \implies R = \frac{1}{g} = +\infty.$$

$x \in \mathbb{R} \implies S(x)$ jest bezwzględnie zbieżny.

Założmy, że funkcja f ma w x_0 pochodne dowolnego rzędu.

Definicja.

Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazywamy szeregiem Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0 . Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f .

Twierdzenie Jeżeli $\exists \delta > 0$ $f \in C^\infty(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, gdzie $R_n(x)$ oznacza n -tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f , to $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Twierdzenie (o jednoznaczności rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy)

Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x_0 zachodzi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, to $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Przykład 252 Rozwinąć funkcję $f(x) = \cos x$ w szereg Maclaurina.

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(IV)}(x) = \cos x, \dots$$

Prostą indukcją matematyczną można pokazać, że

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin x, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos x, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Czyli

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Stąd

$$\cos x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Przykład 253 Rozwinąć funkcję $f(x) = xe^x$ w szereg Taylora o środku w punkcie $x_0 = 1$.
 $f(x) = xe^x$, $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x, \dots$

Prostą indukcją matematyczną można pokazać, że

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

Czyli

$$f^{(n)}(1) = (n+1)e.$$

Stąd

$$xe^x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e}{n!} (x-1)^n.$$

Twierdzenie (o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)

Niech $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Wtedy $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Przykład 254 Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 3^n}$.

Oznaczmy

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Wtedy

$$S\left(-\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 3^n}.$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\begin{aligned} S(0) = 0 \Rightarrow S(x) &= S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = - \int_0^x \frac{dx}{x-1} = -[\ln|x-1|]_0^x = \\ &= -\ln|x-1| + \ln 1 = -\ln|x-1| \Rightarrow S\left(-\frac{1}{3}\right) = -\ln\left|-\frac{1}{3}-1\right| = -\ln\frac{4}{3} = \ln\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Twierdzenie (o całkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)

Niech $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Wtedy

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Przykład 255 Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Oznaczmy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n.$$

Wtedy

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \frac{S(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \Rightarrow \int_0^x \frac{S(x)}{x} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^x x^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \\ &= \frac{1}{1-x} =: T(x). \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{S(x)}{x} = T'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

13 LICZBY ZESPOLONE

UWAGA:

Na przestrzeni wieków w rozmaitych obliczeniach pojawiał się problem poszukiwania pierwiastków wielomianów. Niestety istnieją wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, które pierwiastków rzeczywistych nie posiadają. Najprostszy przykład takiego równania wielomianowego to $x^2 + 1 = 0$. Matematycy postanowili więc rozszerzyć zbiór liczb $\mathbb{R}$ wraz z podstawowymi działaniami arytmetycznymi tak by wśród nowych liczb dało się znaleźć pierwiastki każdego wielomianu. W szczególności, liczbę spełniającą równanie $x^2 + 1 = 0$ nazwano liczbą urojoną i oznaczono literą $i := \sqrt{-1}$.

Definicja.

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y) , które zapisujemy w postaci algebraicznej $x + iy$, gdzie i jest pierwiastkiem równania $x^2 + 1 = 0$.

Jeśli $z = x + iy$ jest liczbą zespoloną, to x nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy $x = \operatorname{Re} z$ (łac. *realis*), a y nazywamy częścią urojoną i oznaczamy $y = \operatorname{Im} z$ (łac. *imaginalis*)

UWAGA:

Zarówno część rzeczywista $\operatorname{Re} z$, jak i część urojona $\operatorname{Im} z$ są liczbami rzeczywistymi.

OZNACZENIE Zbiór liczb zespolonych oznaczamy $\mathbb{C} = \{x + iy, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{R}\}$ (ang. *complex*)

Definicja.

(Działania na liczbach zespolonych)

Niech $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $n \in \mathbb{N}$.

$$(1) \quad z_1 = z_2 \iff a = c \text{ i } b = d \iff \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ i } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2;$$

$$(2) \quad -z_1 = -a - ib := -a + i \cdot (-b);$$

$$(3) \quad z_1 + z_2 := (a + c) + i(b + d);$$

$$(4) \quad z_1 - z_2 := (a - c) + i(b - d);$$

$$(5) \quad z_1 \cdot z_2 := (a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc);$$

$$(6) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2};$$

$$(7) \quad z_1^n = \underbrace{z_1 \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_1}_{n\text{-razy}}.$$

Przykład 256 $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 1 + 3i$.

$\operatorname{Re} z_1 = 5$, $\operatorname{Im} z_1 = -2$, $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 3$;

$z_1 \neq z_2$ np. bo $\operatorname{Re} z_1 \neq \operatorname{Re} z_2$;

$$-z_1 = -5 + 2i, \quad -z_2 = -1 - 3i;$$

$$z_1 + z_2 = 5 + 1 + (-2 + 3)i = 6 + i = z_2 + z_1;$$

$$z_1 - z_2 = 5 - 1 + (-2 - 3)i = 4 - 5i;$$

$$z_2 - z_1 = 1 - 5 + (3 - (-2))i = -4 + 5i = -(z_1 - z_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 - 2i)(1 + 3i) = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3i - 1 \cdot 2i + (-2) \cdot 3 \cdot i^2 = 5 + 6 + (15 - 2)i = 11 + 13i = z_2 \cdot z_1;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 2i}{1 + 3i} = \frac{(5 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{-1 - 17i}{1 + 9} = -\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i;$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1 + 3i}{5 - 2i} = \frac{(1 + 3i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{-1 + 17i}{25 + 4} = -\frac{1}{29} + \frac{17}{29}i;$$

$$z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = (5 - 2i)(5 - 2i) = 25 - 4 - 10i - 10i = 21 - 20i;$$

$$z_2^2 = z_2 \cdot z_2 = (1 + 3i)(1 + 3i) = 1 - 9 + 3i + 3i = -8 + 6i.$$

OBSERWACJA

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, bo $\forall x \in \mathbb{R} \ x = x + i \cdot 0$.

UWAGA:

Jeśli $\text{Im } z = 0$, to $z \in \mathbb{R}$ i liczbę $z = x + i \cdot 0$ zapisujemy po prostu $z = x$.

UWAGA:

Wszelkie prawa arytmetyki liczb rzeczywistych są prawdziwe również dla liczb zespolonych.

Twierdzenie (Prawa arytmetyki zespolonej)

- (1) $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + 0 = 0 + z = z$ (zero jest elementem neutralnym dodawania)
- (2) $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + (-z) = -z + z = 0$ ($-z$ jest liczbą przeciwną do z)
- (3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (dodawanie jest przemienne)
- (4) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (dodawanie jest łączne)
- (5) $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (jeden jest elementem neutralnym mnożenia)
- (6) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ ($\frac{1}{z}$ jest liczbą odwrotną do z)
- (7) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (mnożenie jest przemienne)
- (8) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (mnożenie jest łączne)
- (9) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (mnożenie jest rozdzielne względem dodawania)
- (10) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

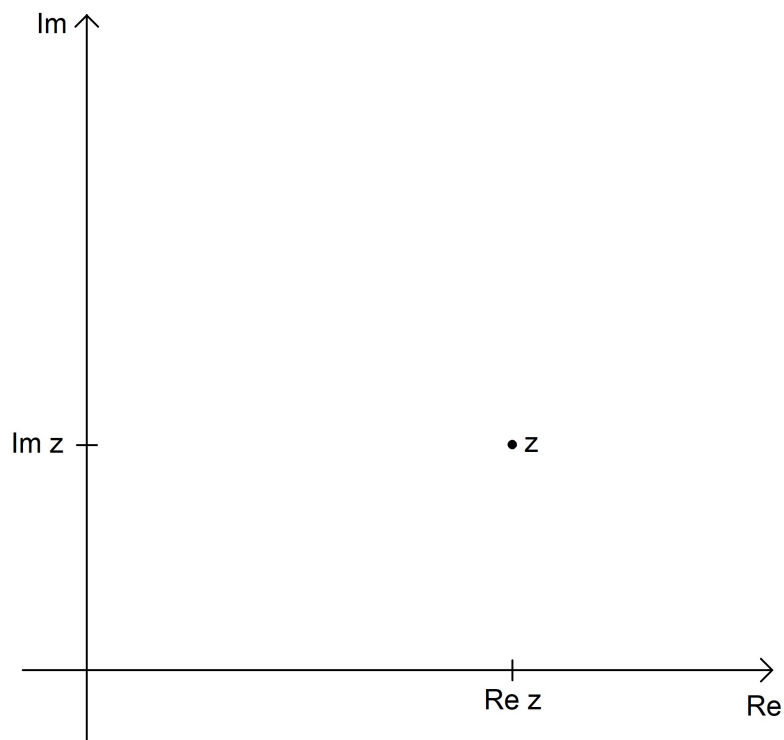
$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + \binom{n}{n-1} z_1 z_2^{n-1} + \binom{n}{n} z_2^n$$

(wzór Newtona)

W szczególności:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^2 &= z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 \\ (z_1 - z_2)^2 &= z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 \end{aligned}$$

- (11) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$
- (12) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$
- (13) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$
- (14) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad z^{m+n} = z^m \cdot z^n$
- (15) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad z^{m-n} = \frac{z^m}{z^n}$
- (16) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad z^{m \cdot n} = (z^m)^n$
- (17) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \vee z_2 = 0$
- (18) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = 0 \iff z = 0.$

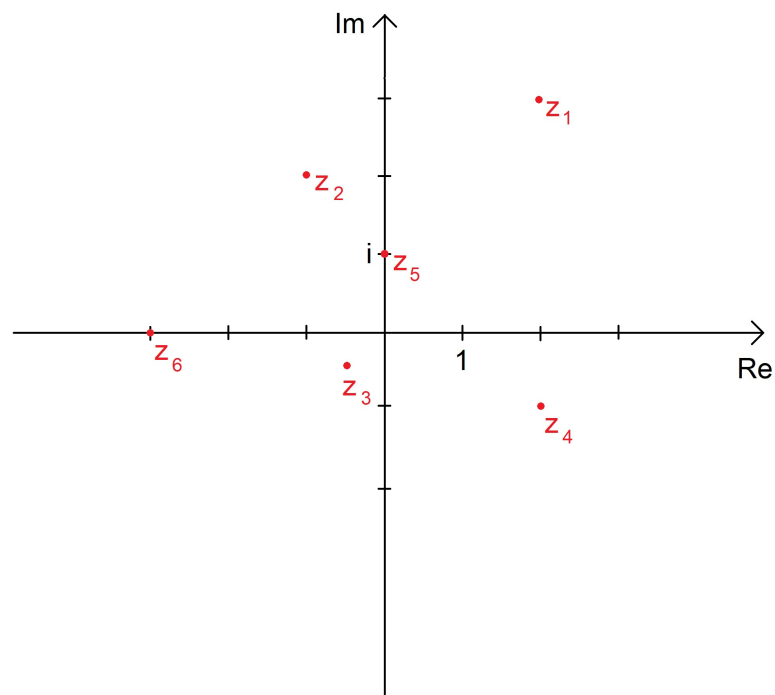


Rysunek 1: Płaszczyzna zespolona

UWAGA:

(Interpretacja geometryczna liczb zespolonych)

Każdą liczbę zespoloną $z = x + iy$ możemy w sposób jednoznaczny utożsamić z punktem o współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie. Zbiór $\mathbb{C}$ utożsamiamy więc z płaszczyzną, którą nazywamy płaszczyzną zespoloną. Osie współrzędnych na tej płaszczyźnie nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą (oznaczamy ją Re) i osią urojoną (oznaczamy ją Im). Oś rzeczywista pokrywa się ze zbiorem $\mathbb{R}$ (w szczególności 0 leży na przecięciu osi).

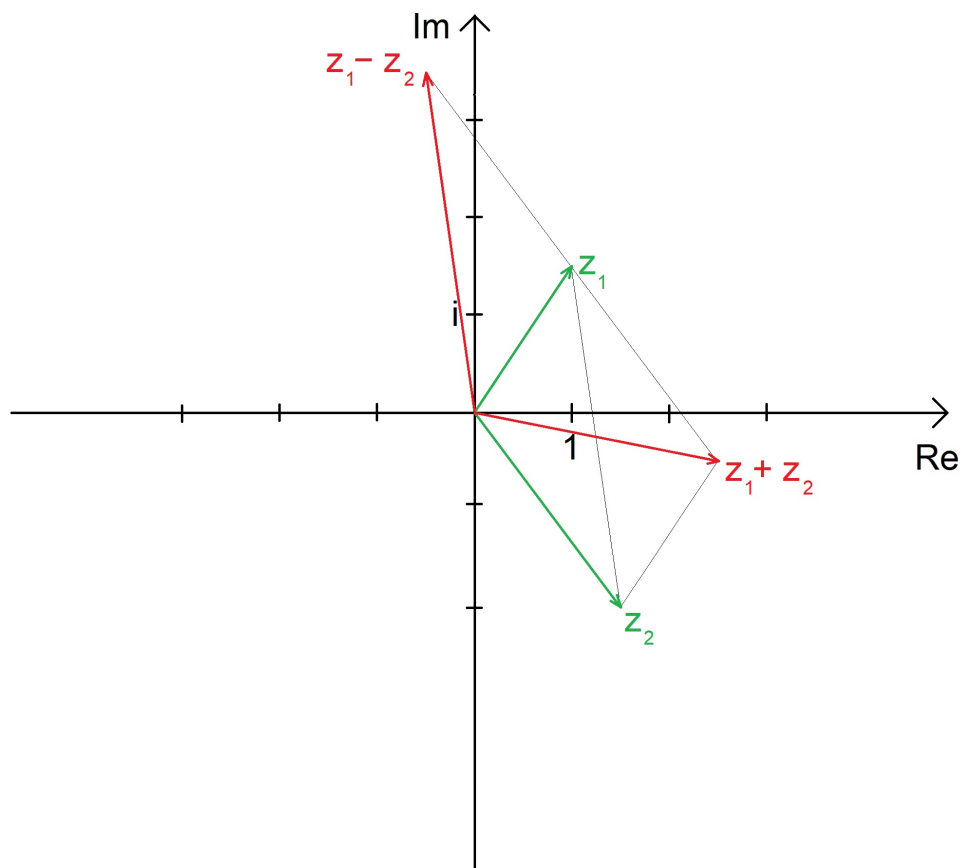


Rysunek 2: Przykład 257

Przykład 257 $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = i$, $z_6 = -3$.

UWAGA:

Liczbę zespoloną $z = x + iy$ możemy też traktować jako wektor zaczepiony w środku układu współrzędnych, o końcu w punkcie (x, y) , zwany wektorem wodzącym liczby z . Przy tej interpretacji sumę i różnicę dwóch liczb zespolonych możemy znaleźć na płaszczyźnie zespolonej korzystając z reguły równoległoboku.



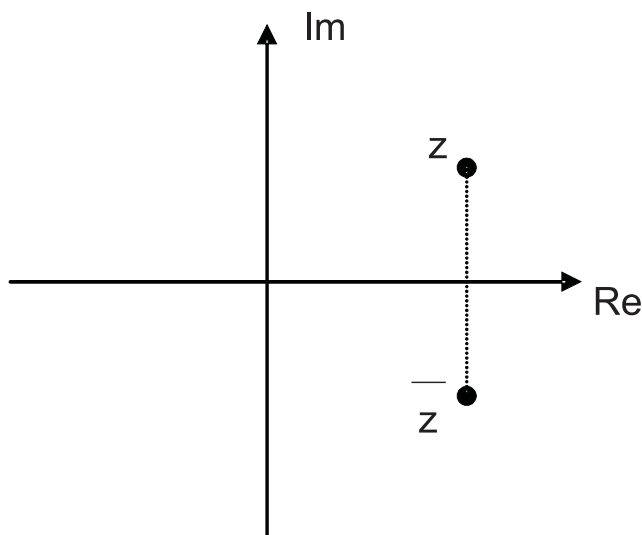
Rysunek 3: Reguła równoległoboku

Definicja.

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} := x - iy$.

UWAGA:

Geometrycznie, sprzężenie liczby z na płaszczyźnie zespolonej to symetryczne odbicie punktu z względem osi rzeczywistej.



Rysunek 4: Sprzężenie liczby zespolonej

Twierdzenie (Własności sprzężenia) Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

- | | |
|--|--|
| (1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ | (7) $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$ |
| (2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ | (8) $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$ |
| (3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ | (9) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ |
| (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ gdy $z \neq 0$ | (10) $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$ |
| (5) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ | (11) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$. |
| (6) $\bar{\bar{z}} = z$ | |

Definicja.

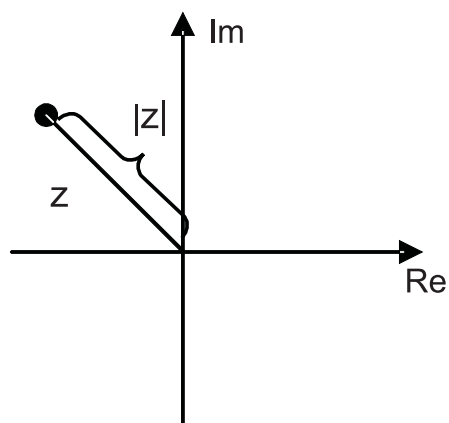
Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

UWAGA:

Geometrycznie, moduł liczby z na płaszczyźnie zespolonej to odległość punktu z od środka płaszczyzny $(0, 0)$.

Twierdzenie (Własności modułu) Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

- | | |
|--|--|
| (1) $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $ | (6) $ \bar{z} = z = -z $ |
| (2) $ z_1 - z_2 \geq z_1 - z_2 $ | (7) $z \cdot \bar{z} = z ^2$ |
| (3) $ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $ | (8) $ \operatorname{Re} z \leq z $ |
| (4) $\left \frac{z_1}{z_2}\right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ | (9) $ \operatorname{Im} z \leq z $. |
| (5) $ z^n = z ^n$ | |



Rysunek 5: Moduł liczby zespolonej

OBSERWACJA

$x \in \mathbb{R} \implies$ moduł zespolony $z\ x$ jest równy wartości bezwzględnej $z\ x$ (nie ma kolizji oznaczeń).

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

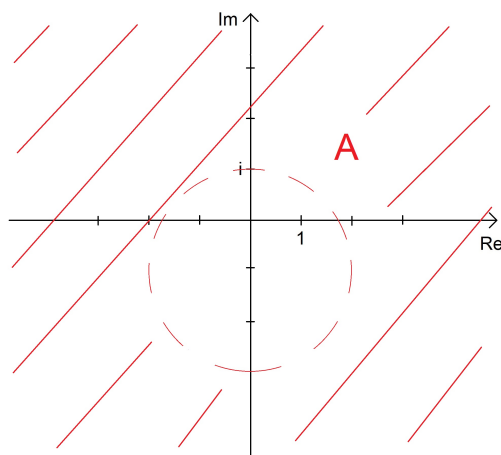
DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

UWAGA:

Jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to $|z_1 - z_2|$ oznacza geometrycznie odległość liczby z_1 od z_2 na płaszczyźnie zespolonej.

Przykład 258 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| > 2\}$.

Zbiór A jest zbiorem punktów z , których odległość od $-i$ jest większa od 2:



Rysunek 1: Zbiór z przykładu 258

Przykład 259 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| = |z - 1 + i|\}$.

Zbiór B jest zbiorem punktów równoodległych od $-1 + i$ oraz $1 - i$, czyli punktów, których część rzeczywista jest równa części urojonej.

Definicja.

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą układ równań

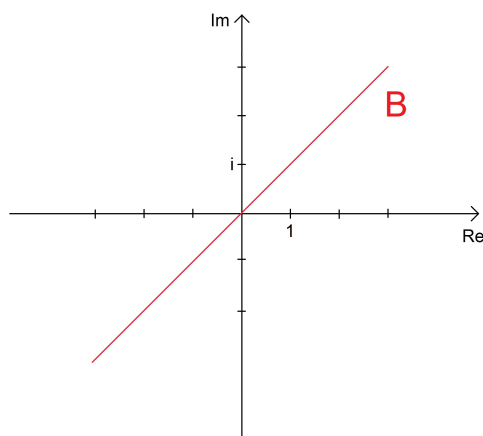
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}.$$

OBSERWACJA

Jeżeli φ jest argumentem liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\varphi + 2k\pi$ też jest argumentem z .

Definicja.

Jeżeli φ jest argumentem liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\varphi \in [0; 2\pi)$, to φ nazywamy argumentem głównym z i oznaczamy $\varphi = \arg z$.



Rysunek 2: Zbiór z przykładu 259

UWAGA:

Geometrycznie, argument głównej liczby z na płaszczyźnie zespolonej to kąt nachylenia wektora wodzącego liczby z do dodatniej półosi rzeczywistej.

Twierdzenie (Własności argumentu głównego)

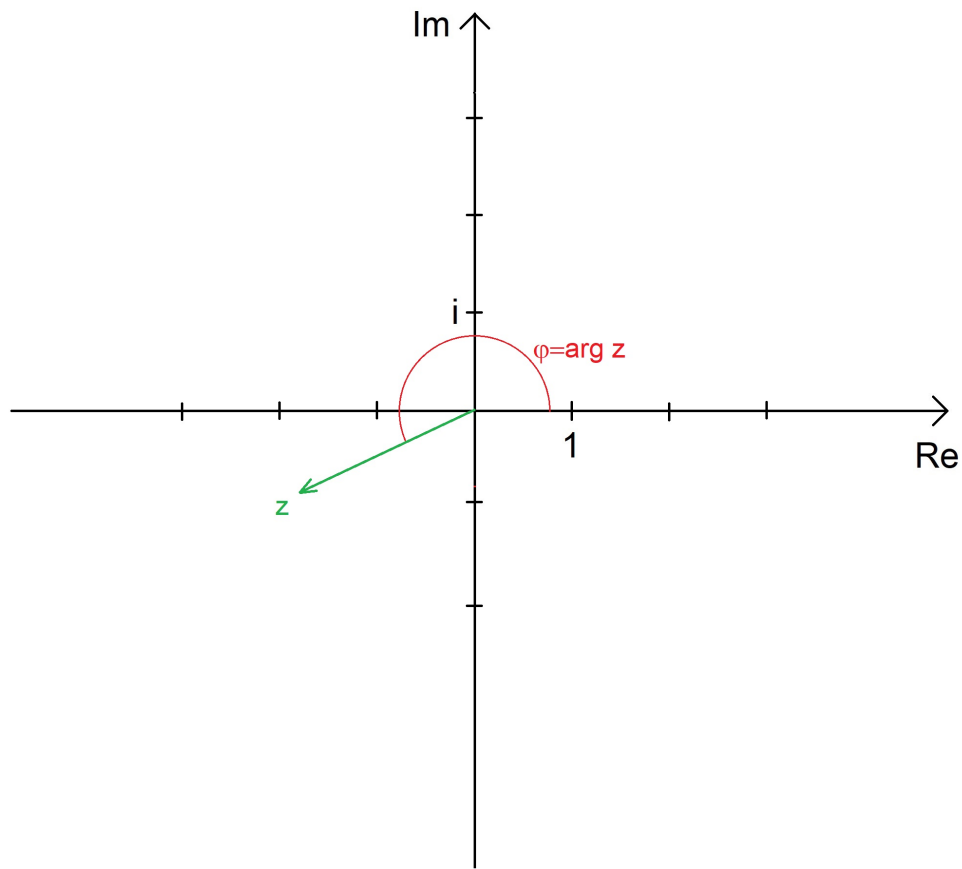
Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

- (1) $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z = \arg \frac{1}{z}$
- (2) $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & \text{gdy } \arg z \in \langle 0; \pi \rangle \\ \arg z - \pi, & \text{gdy } \arg z \in \langle \pi; 2\pi \rangle \end{cases}$
- (3) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k = 0$ lub $k = -1$
- (4) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k = 0$ lub $k = 1$
- (5) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

UWAGA:

Jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, to $\arg(z_1 - z_2)$ oznacza geometrycznie kąt nachylenia wektora $\overrightarrow{z_1 z_2}$ do półprostej równoległej do osi rzeczywistej, rozpoczynającej się w punkcie z_2 .

Przykład 260 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $C = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{3}\}$.



Rysunek 3: Argument główny liczby zespolonej

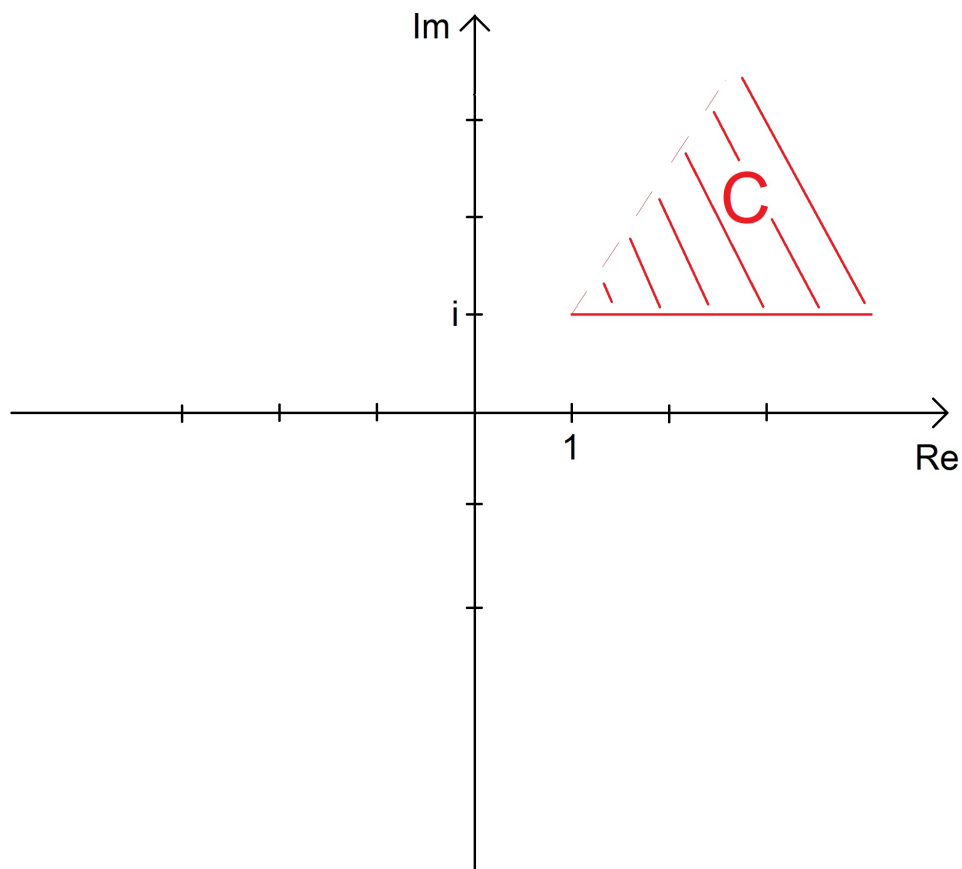
OBSERWACJA

(Postać trygonometryczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną $z = x + iy \neq 0$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = |z| \geq 0$ oraz $\varphi = \arg z \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Rysunek 4: Zbiór z przykładu 260

Dowód:

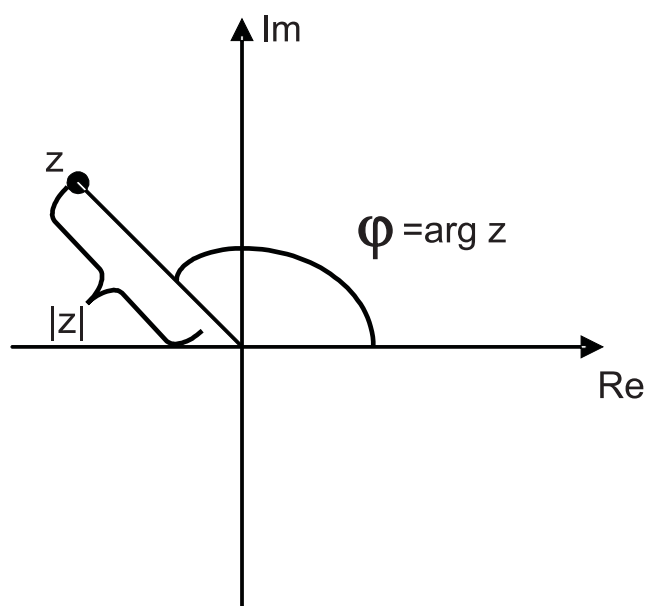
$$z = x + iy = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i \cdot \frac{y}{|z|} \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

■

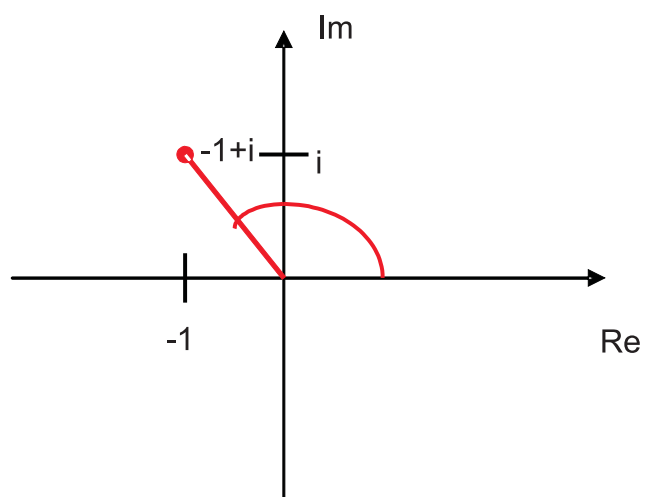
Przykład 261 Zapisać w postaci trygonometrycznej liczbę $z = -1 + i$.

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}. \text{ Stąd } z = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$



Rysunek 5: Postać trygonometryczna liczby zespolonej



Rysunek 6: Przykład 261

Twierdzenie (Działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej)

Niech $n \in \mathbb{N}$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $r_1 = |z_1|$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $r_2 = |z_2|$, $\varphi_2 = \arg z_2$.

Wtedy

- (1) $\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$
- (2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$
- (3) $-z = r(\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi))$
- (4) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- (5) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, gdy $z_2 \neq 0$
- (6) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (WZÓR DE MOIVRE'A)

Przykład 262 Obliczyć $z = (1 + \sqrt{3}i)^{10}$.

Niech $w = 1 + \sqrt{3}i$, $\varphi = \arg w$.

$$|w| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \arg z = \varphi = \frac{\pi}{3}. \text{ Stąd}$$

$$w = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \Rightarrow z = w^{10} \stackrel{(6)}{=} 2^{10}(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}) = 1024(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = \\ = 1024(-\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

Przykład 263 Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $D = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = \bar{z}^3\}$.

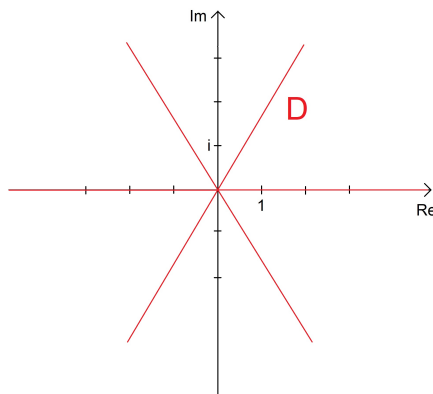
$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$$r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = r^3(\cos(-3\varphi) + i \sin(-3\varphi))$$

$$r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = r^3(\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi) \Leftrightarrow r^3 \sin 3\varphi = -r^3 \sin 3\varphi \Leftrightarrow 2r^3 \sin 3\varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \vee \sin 3\varphi = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee 3\varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 0 \vee \varphi = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \Rightarrow D = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}\}.$$

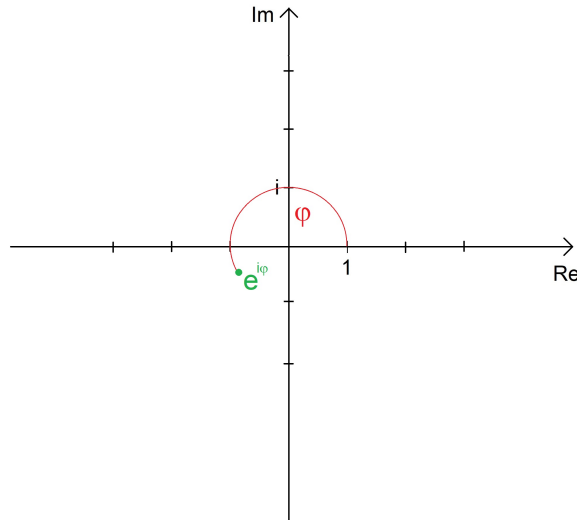


Rysunek 7: Zbiór z przykładu 263

Definicja.

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
--

 $\forall \varphi \in \mathbb{R}.$



Rysunek 8: Potęga zespolona

Twierdzenie Niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

- | | |
|--|--|
| (1) $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$
(2) $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$
(3) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$
(4) $\overline{(e^{i\varphi})} = e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$ | (5) $ e^{i\varphi} = 1$
(6) $\arg(e^{i\varphi}) = \varphi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$
(7) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. |
|--|--|

Przykład 264 ("Najpiękniejszy wzór świata")

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Czyli wszystkie najważniejsze stałe matematyczne są związane równaniem:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

OBSERWACJA

(Wzory Eulera)

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}, \quad \boxed{\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

Przykład 265 Wyprowadzić wzór na $\cos 3\varphi$.

$$\cos^3 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\varphi})^3 + 3(e^{i\varphi})^2 e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi} (e^{-i\varphi})^2 + (e^{-i\varphi})^3}{8} = \frac{e^{i3\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-i3\varphi}}{8} = \frac{1}{4} \frac{e^{i3\varphi} + e^{-i3\varphi}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

Stąd otrzymujemy $\cos^3 \varphi = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) \implies \cos 3\varphi + 3 \cos \varphi = 4 \cos^3 \varphi \implies$

$$\boxed{\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi}$$

OBSERWACJA

(Postać wykładnicza liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci: $\boxed{z = re^{i\varphi}}$, gdzie $r = |z| \geq 0$ oraz $\varphi = \arg z \in \langle 0; 2\pi \rangle$.**Przykład 266** Zapisać w postaci wykładniczej $z = 1 + \sqrt{3}i$ $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$ (patrz przykład 262). Zatem $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.**Przykład 267** Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $E = \{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}^2\}$.

$$z = re^{i\varphi}.$$

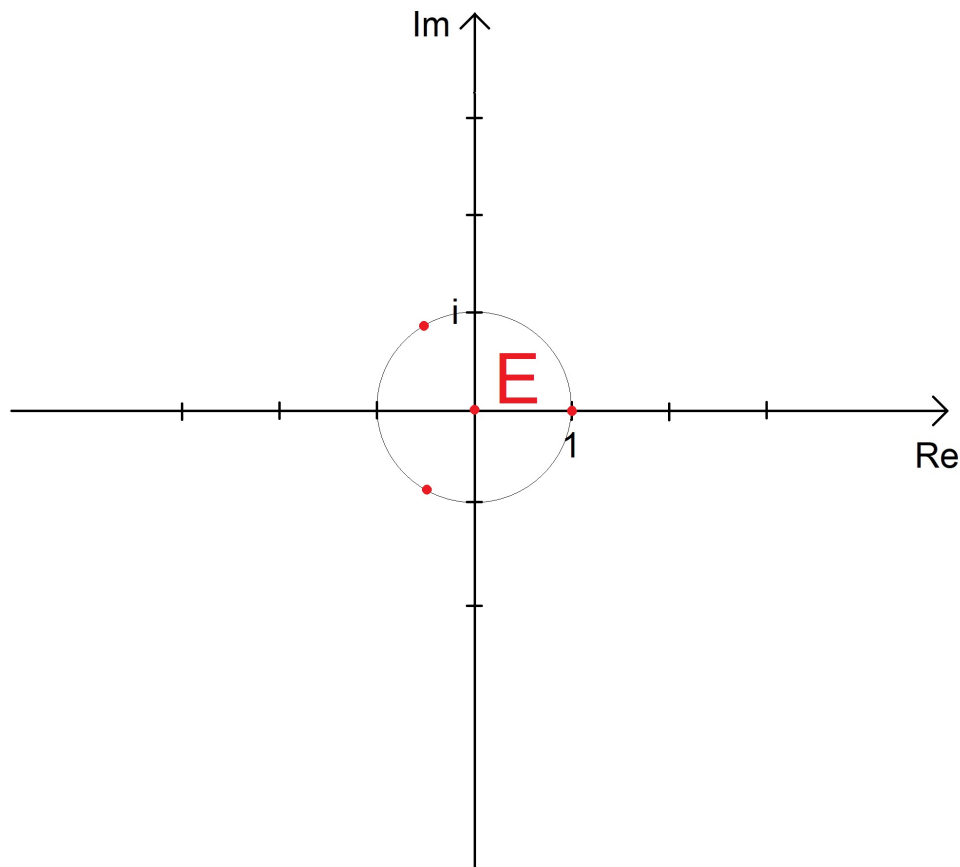
$$re^{i\varphi} = (re^{-i\varphi})^2 = r^2 e^{-i2\varphi} \iff r = 0 \text{ lub } re^{-i3\varphi} = 1 \iff z = 0 \text{ lub } (r = 1 \text{ i } -3\varphi = 2k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}) \iff z = 0 \text{ lub } (|z| = 1 \text{ i } \varphi = -\frac{2}{3}k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}) \iff z = 0 \text{ lub } (|z| = 1 \text{ i } \varphi = 0 \text{ lub } \varphi = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } \varphi = \frac{4}{3}\pi) \iff z = 0 \text{ lub } z = 1 \text{ lub } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Definicja.Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość $z = w^n$.**OZNACZENIE** Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$.**UWAGA:**

Pomimo takiego samego oznaczenia definicja pierwiastka rzeczywistego stopnia n z liczby rzeczywistej różni się nieco od definicji pierwiastka zespolonego. Pierwiastek rzeczywisty jest zawsze jedną liczbą rzeczywistą (czasem nie istnieje, np. $\sqrt{-1}$), a więc jest funkcją, natomiast pierwiastek zespolony przyporządkowuje liczbie zespolonej cały zbiór. Np. $\sqrt[4]{1} = 1$ w sensie pierwiastka rzeczywistego, a $\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$ w sensie pierwiastka zespolonego.

Twierdzenie Każda liczba zespolona $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, gdzie $r > 0$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n . Zbiór tych pierwiastków ma postać

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$



Rysunek 1: Zbiór z przykładu 267

UWAGA:

$$\sqrt[n]{0} = \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

UWAGA:

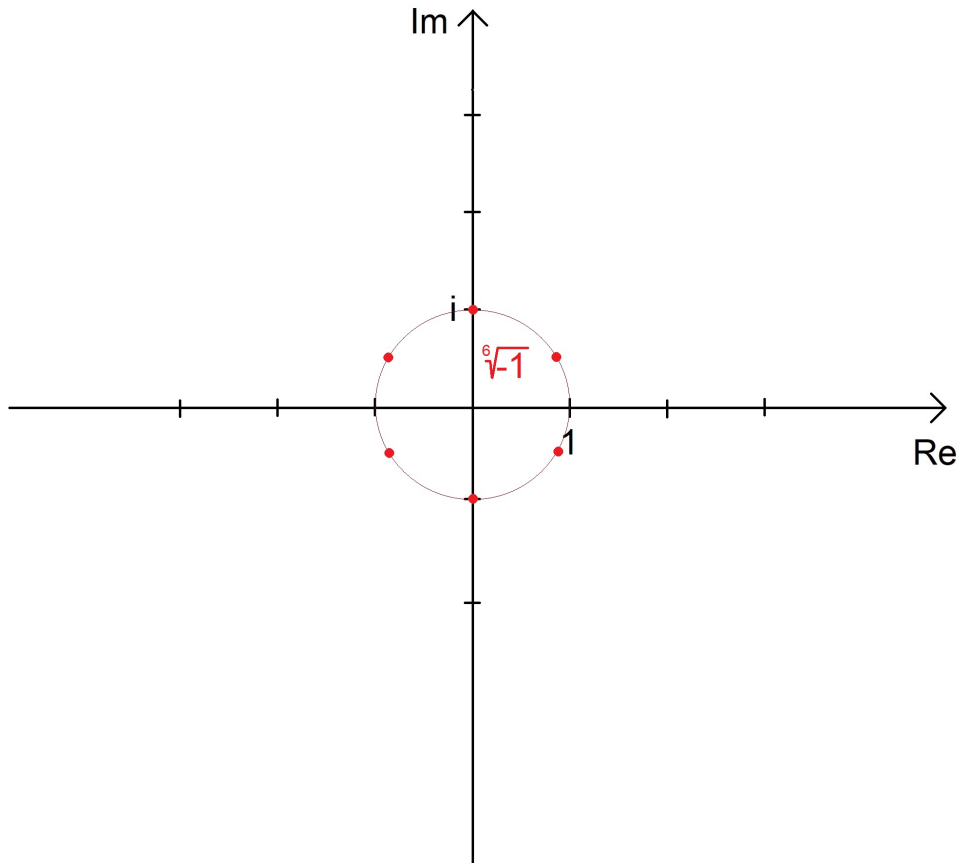
Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ na płaszczyźnie zespolonej pokrywa się ze zbiorem wierzchołków pewnego n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w zerze i promieniu długości $\sqrt[n]{|z|}$.

Przykład 268 Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\sqrt[6]{-1}$.

$|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, zatem $\sqrt[6]{r} = 1$, $\varphi = \pi$

$$\sqrt[6]{-1} = \left\{ \cos \frac{\pi+0}{6} + i \sin \frac{\pi+0}{6}, \cos \frac{\pi+2\pi}{6} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{6}, \cos \frac{\pi+4\pi}{6} + i \sin \frac{\pi+4\pi}{6}, \cos \frac{\pi+6\pi}{6} + i \sin \frac{\pi+6\pi}{6}, \cos \frac{\pi+8\pi}{6} + \right.$$

$$+i \sin \frac{\pi+8\pi}{6}, \cos \frac{\pi+10\pi}{6} + i \sin \frac{\pi+10\pi}{6}\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$



Rysunek 2: Zbiór z przykładu 268

Przykład 269 Wyznaczyć zbiór $\sqrt{5-12i}$.

Ponieważ liczbę pod pierwiastkiem ciężko byłoby przedstawić w postaci trygonometrycznej, skorzystamy z definicji pierwiastka. Będziemy szukać liczb postaci $x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $5-12i = (x+iy)^2$.

Liczymy:

$$5-12i = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases}.$$

$$y = -\frac{6}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5, \text{ więc}$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Podstawiamy $x^2 =: t \geq 0$:

$$t^2 - 5t - 36 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13, \text{ czyli}$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5-13}{2} = -4 < 0 \\ t_2 = \frac{5+13}{2} = 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Ostatecznie

$$\sqrt{5-12i} = \{3-2i, -3+2i\}.$$

Twierdzenie

Równanie kwadratowe

$$az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, o wyróżniku $\Delta = b^2 - 4ac$, posiada

(a) dokładnie dwa pierwiastki zespolone

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdy $\Delta \neq 0$, przy czym $\sqrt{\Delta}$ oznacza którykolwiek z dwóch pierwiastków kwadratowych z Δ ;

(b) dokładnie jeden pierwiastek zespolony

$$z_0 = \frac{-b}{2a},$$

gdy $\Delta = 0$.

Przykład 270 Rozwiązać równanie

$$z^2 - 2iz - 1 - i = 0.$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(-1-i) = -4 + 4 + 4i = 4i = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \{\sqrt{4}(\cos \frac{\pi+0}{2} + i \sin \frac{\pi+0}{2}), \sqrt{4}(\cos \frac{\pi+2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{2})\} = \{2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}), 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})\} = \\ &= \{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{2i - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = \frac{2i + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

14 MACIERZE

Definicja.

Macierz rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy prostokątną tablicę $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach. Liczby znajdujące się w macierzy nazywamy jej elementami.

OZNACZENIE Macierz oznaczamy zazwyczaj dużymi literami alfabetu (np. A, X), a jej elementy małymi literami z dwoma indeksami dolnymi oznaczającymi kolejny numer wiersza i numer kolumny, w których znajduje się element (np. a_{25}, x_{11}). Elementy macierzy ograniczamy dużymi nawiasami kwadratowymi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Czasami macierz oznaczamy $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Przykład 271

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \pi & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \text{ jest macierzą rzeczywistą wymiaru } 3 \times 2.$$

Przykład 272

$$A = \begin{bmatrix} i & 13 & \sqrt{5} - 3i \end{bmatrix} \text{ jest macierzą zespoloną wymiaru } 1 \times 3.$$

OZNACZENIE Zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ oznaczać będziemy $\mathcal{M}(m \times n)$.

Definicja.

Macierz $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, której wszystkie elementy są zerami nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy $\mathbf{0}_{m \times n}$.

Definicja.

Macierz $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ (liczba wierszy równa jest liczbie kolumn) nazywamy macierzą kwadratową stopnia n . Elementy macierzy kwadratowej o tym samym numerze wiersza co kolumny tworzą tzw. główną przekątną (główną diagonalę) macierzy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ macierz kwadratowa}$$

← główna przekątna

Przykład 273

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierzą kwadratową stopnia 2.

OZNACZENIE Zbiór macierzy kwadratowych stopnia n (tj. $\mathcal{M}(n \times n)$) oznaczать będziemy $\mathcal{M}(n)$.

Definicja.

Macierz $A \in \mathcal{M}(n)$, której wszystkie elementy $\begin{matrix} \text{nad} \\ \text{pod} \end{matrix}$ główną przekątną są zerami nazywamy macierzą trójkątną $\begin{matrix} \text{dolną} \\ \text{górną} \end{matrix}$.

Przykład 274

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ jest macierzą trójkątną dolną, a macierz $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ jest macierzą trójkątną górną.

Definicja.

$A \in \mathcal{M}(n)$, której wszystkie elementy poza główną przekątną są zerami nazywamy macierzą diagonalną.

Przykład 275

$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ jest macierzą diagonalną.

Definicja.

Macierzą diagonalną stopnia n , której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1 nazywamy macierzą jednostkową (identycznościową). Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy I_n .

Przykład 276

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definicja.

Macierz $B \in \mathcal{M}(m \times n)$, nazywamy macierzą transponowaną do macierzy $A \in \mathcal{M}(n \times m)$, jeżeli $\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} b_{ij} = a_{ji}$.

OZNACZENIE Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T .

Przykład 277

Macierzą transponowaną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 13 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ jest macierz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 13 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Definicja.

Macierz kwadratową $A \in \mathcal{M}(n)$ nazywamy macierzą symetryczną, jeżeli

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \ a_{ji} = a_{ij}$.

OBSERWACJA

Macierz $A \in \mathcal{M}(n)$ jest symetryczna $\iff A^T = A$.

Przykład 278

Macierz $G = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierzą symetryczną.

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Sumą (różnicą) dwóch macierzy $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$, której elementy określone są wzorem $c_{ij} := a_{ij} \pm b_{ij}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Piszemy wtedy $C = A \pm B$.

Przykład 279

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 4 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UWAGA:

Dwóch macierzy różnych wymiarów nie da się do siebie dodać, ani od siebie odjąć.

Definicja.

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ przez liczbę k (rzeczywistą lub zespoloną) nazywamy macierz $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$, której elementy określone są wzorem $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Piszemy wtedy $B = k \cdot A$.

Przykład 280

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -2, \quad k \cdot A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -8 & -4 \\ 2 & -2 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja.

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times \underline{n})$ przez macierz $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}(\underline{n} \times k)$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times k)$, której elementy określone są wzorem $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Piszemy wtedy $C = A \cdot B$.

UWAGA:

Macierz A możemy pomnożyć przez B , jeżeli liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B .

UWAGA:

Mnożenie macierzy zwykle nie jest przemienne!

UWAGA:

Macierze łatwo mnożymy stosując tzw. schemat Falcaka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & c_{ij} & \cdots \end{bmatrix} = C$$

Definicja.

Niech $A \in \mathcal{M}(n)$, $k \in \mathbb{N}$

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-razy}}$$

Przykład 281

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Możemy wykonać mnożenie $A \cdot B$.
Nie możemy wykonać mnożenia $B \cdot A$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 12 & -6 & -1 \\ 8 & 0 & 4 \\ -17 & 9 & 2 \\ -10 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A \cdot B$$

Przykład 282

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Możemy wykonać mnożenia $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A \cdot B \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$.

(różnią się wymiarami)

Przykład 283

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Możemy wykonać mnożenia $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = A \cdot B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Możemy też np. policzyć A^2 .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = A^2.$$

Twierdzenie (Własności działań na macierzach)

- (1) $A + B = B + A$, $A, B \in \mathcal{M}(m \times n)$ (dodawanie macierzy jest przemienne)
- (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n)$ (dodawanie macierzy jest łączne)
- (3) $A + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{0}_{m \times n} + A = A$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ ($\mathbf{0}_{m \times n}$ jest elementem neutralnym dodawania macierzy)
- (4) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$, $A, B \in \mathcal{M}(m \times n)$, $k \in \mathbb{C}$ (mnożenie przez liczbę jest rozdzielne względem dodawania macierzy)
- (5) $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $k, l \in \mathbb{C}$ (mnożenie przez macierz jest rozdzielne względem dodawania liczb)
- (6) $1 \cdot A = A$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ (1 jest elementem neutralnym mnożenia liczb przez macierz)
- (7) $(k \cdot l) \cdot A = k \cdot (l \cdot A)$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $k, l \in \mathbb{C}$ (łączność mieszana)
- (8) $A(B + C) = AB + AC$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B, C \in \mathcal{M}(n \times k)$ (rozdzielność mnożenia macierzy względem ich dodawania)
- (9) $(A + B)C = AC + BC$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $C \in \mathcal{M}(n \times k)$
- (10) $A \cdot (k \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B)$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times l)$ (przemienność dwóch mnożeń)
- (11) $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times k)$, $C \in \mathcal{M}(k \times l)$ (mnożenie macierzy jest łączne)
- (12) $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ (macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy)
- (13) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $A, B \in \mathcal{M}(m \times n)$
- (14) $(A^T)^T = A$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$
- (15) $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $k \in \mathbb{C}$
- (16) $(AB)^T = B^T A^T$, $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times k)$
- (17) $(A^k)^T = (A^T)^k$, $A \in \mathcal{M}(n)$, $k \in \mathbb{N}$.

UWAGA:

$A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$ dla pewnych $k > 1 \nRightarrow A = \mathbf{0}_{n \times n}$, gdy $A \in \mathcal{M}(n)$ (w szczególności $AB = \mathbf{0} \nRightarrow A = \mathbf{0}$ lub $B = \mathbf{0}$).

Przykład 284

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_{2 \times 2}, \text{ chociaż } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja.

Niech $A \in \mathcal{M}(n)$.

Wyznacznikiem macierzy rzeczywistej (zespólonej) A nazywamy liczbę $\det A$ (ang. *determinant* = wyznacznik) określoną wzorem indukcyjnym:

(a) Dla $n = 1$ $\det A = \det[a_{11}] := a_{11}$.

(b) Dla $n \geq 2$

$\det A = (-1)^{1+1}a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n} \det A_{1n}$, gdzie A_{1j} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez wykreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny ($A_{1j} \in \mathcal{M}(n-1)$).

$$\text{OZNACZENIE} \quad \det A = |A| = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(dla $n = 1$ nie stosujemy ostatniego oznaczenia $|a_{11}|$, ze względu na kolizję z oznaczeniem modułu)

UWAGA:

Wyznacznik macierzy można liczyć jedynie dla macierzy kwadratowych!

OBSERWACJA

Dla $n = 2$ i $n = 3$ istnieją proste reguły pozwalające policzyć wyznacznik bez odwoływania się do indukcji.

$$n = 2 : \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$n = 3 : (\text{Reguła Sarrusa}) \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Przykład 285

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10.$$

Przykład 286

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot 3 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot 2 + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot 1 = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0$$

Definicja.

Niech $A \in \mathcal{M}(n)$, $n \geq 2$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Twierdzenie (Rozwinięcie Laplace’a wyznacznika)

Niech $A \in \mathcal{M}(n)$, $n \geq 2$, $i, j \in 1, \dots, n$. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć z jednego ze wzorów

$$(1) \det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in} \quad (\text{rozwinięcie Laplace’a względem } i\text{-tego wiersza});$$

$$(2) \det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj} \quad (\text{rozwinięcie Laplace’a względem } j\text{-tej kolumny}).$$

UWAGA:

Obliczając wyznacznik możemy rozwijać go względem dowolnego wiersza (lub kolumny) więc w praktyce najlepiej jest wybrać ten wiersz (kolumnę), w którym jest najwięcej zer.

Przykład 287

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot (6 - 4 - 6 - 9 - 8 - 2) + 0 + (-2) \cdot (0 + 10 + 36 - 0 - 30 + 16) = 23 - 64 = -41.$$

Twierdzenie (Wyznacznik macierzy trójkątnej)

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej lub trójkątnej dolnej $A \in \mathcal{M}(n)$ jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

WNIOSEK

Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów stojących na głównej przekątnej.

WNIOSEK

Wyznacznik macierzy jednostkowej I_n jest równy 1 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Przykład 288

$$\begin{vmatrix} 2i & 3 & 4+i & \sqrt{2} \\ 0 & -i & 0 & 2-8i \\ 0 & 0 & i & 17 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = 2i \cdot (-i) \cdot i \cdot i = -2.$$

Przykład 289

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120.$$

Twierdzenie (Własności wyznaczników)

- (1) Wyznacznik macierzy mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer wynosi 0.
- (2) Wyznacznik macierzy o dwóch takich samych kolumnach (wierszach) wynosi 0.
- (3) Wyznaczniki dwóch macierzy mających przestawione dwie kolumny (wiersze) są do siebie przeciwnie.
- (4) Jeśli kolumnę (wiersz) pewnej macierzy przemnożymy przez tę samą liczbę $k \in \mathbb{C}$, to jej wyznacznik też mnoży się przez k . W szczególności
 $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, gdy $A \in \mathcal{M}(n)$, $k \in \mathbb{C}$.
- (5) Wyznacznik macierzy nie ulega zmianom, jeśli do elementów którejkolwiek z jej kolumn (wierszy) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (wiersza) przemnożone przez tę samą liczbę zespoloną.
- (6) $\det A^T = \det A$, gdy $A \in \mathcal{M}(n)$.
- (7) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, gdy $A, B \in \mathcal{M}(n)$.
- (8) $\det A^k = (\det A)^k$, gdy $A \in \mathcal{M}(n)$, $k \in \mathbb{N}$.

Przykład 290

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} w1+w4 \\ w2-3w4 \\ w3-2w4 \\ w5-4w4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -7 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ -14 & 0 & -15 & 16 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{k2}{=} 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 & 1 \\ -5 & -7 & 13 & 5 \\ 0 & -8 & 8 & 7 \\ -14 & -15 & 16 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{w2+w1}{=} \\
 & 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -8 & 8 & 7 \\ -14 & -15 & 16 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{k3-2k4}{=} \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & -6 & 7 \\ -14 & -15 & -6 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{w2}{=} 6 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 0 & -8 & -6 \\ -14 & -15 & -6 \end{vmatrix} \stackrel{w2-2w1}{\stackrel{w3-2w1}{=}} \\
 & 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -10 & -22 & 0 \\ -24 & -29 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{k3}{=} 6 \cdot (-3) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -10 & -22 \\ -24 & -29 \end{vmatrix} = -18 \cdot (290 - 528) = -18 \cdot (-238) = 4284.
 \end{aligned}$$

MATEMATYKA

Wykład dla I roku kierunku Automatyka przemysłowa i robotyka
Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

DR JACEK SZYBOWSKI
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
szybowsk@agh.edu.pl

Definicja.

Niech $A \in \mathcal{M}(n)$

Macierz A nazywamy odwracalną, jeżeli istnieje macierz $B \in \mathcal{M}(n)$ taka, że $AB = I_n = BA$. Macierz B nazywamy wtedy macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy ją A^{-1} .

Definicja.

Macierz $A \in \mathcal{M}(n)$ nazywamy osobliwą, jeżeli $\det A = 0$. Macierz $A \in \mathcal{M}(n)$ nazywamy nieosobliwą, jeżeli $\det A \neq 0$.

Twierdzenie Macierz jest odwracalna $\Leftrightarrow$ jest nieosobliwa.

Twierdzenie (Własności macierzy odwrotnych)

Niech $A, B \in \mathcal{M}(n)$ będą macierzami nieosobliwymi, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy macierze

$$A^{-1}, A^T, k \cdot A, A^n$$

też są nieosobliwe i prawdziwe są równości.

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
- (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- (3) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$,
- (4) $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$,
- (5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- (6) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

OBSERWACJA

$$I_n^{-1} = I_n.$$

Twierdzenie

Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}(n)$ będzie macierzą nieosobliwą. Wtedy $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^D)^T$, gdzie

$$A^D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} \text{ jest tzw. } \underline{\text{macierzą dopełnień algebraicznych}}$$

(D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy A).

Przykład 291

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0. \text{ Wtedy } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Przykład 292 Odwrócić macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$\det A = 3 - 2 + 4 + 6 = 11 \neq 0 \Rightarrow A$ jest odwracalna.

$$A^D = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(A^D)^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

UWAGA:

Istnieje też inny sposób odwracania macierzy $A \in \mathcal{M}(n)$, zwany algorytmem Gaussa. Jego kolejne kroki są następujące:

- (1) Tworzymy macierz B wymiaru $n \times 2n$ dopisując po prawej stronie macierzy A macierz identycznościową I_n .
- (2) Dla i od 1 do n powtarzamy kroki:
 - (2a) Dzielimy i -ty wiersz macierzy B przez a_{ii} , otrzymując 1 na głównej przekątnej A ; (gdy $a_{ii} = 0$, zamieniamy wcześniej i -ty wiersz z k -tym takim, że $a_{ik} \neq 0$);
 - (2b) Dla p od $i+1$ do n odejmujemy od p -tego wiersza macierzy B jej i -ty wiersz, pomnożony przez a_{pi} , otrzymując 0 poniżej głównej przekątnej A ;
- (3) Dla i od n do 2 powtarzamy kroki:
 - Dla p od 1 do $i-1$ odejmujemy od p -tego wiersza macierzy B jej i -ty wiersz, pomnożony przez a_{pi} , otrzymując 0 powyżej głównej przekątnej A ;
- (4) Otrzymujemy macierz B' wymiaru $n \times 2n$ z macierzą I_n po lewej i macierzą A^{-1} po prawej stronie.

Przykład 293 Odwrócić macierz A z przykładu 292 metodą Gaussa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{w2-2w1 \\ w3+2w1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w2:3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & | & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 7 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w3+2w2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & | & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & | & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w3: \frac{11}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & | & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array} \right] \xrightarrow[w2+\frac{5}{3}w3]{w1-2w3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{w1+w2} \\
&\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Jak widać, otrzymaliśmy tę samą macierz A^{-1} co w przykładzie 292.

Przykład 294 Rozwiązać równanie macierzowe $AXB = C$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -26 & 19 \\ -7 & 5 \\ -22 & 17 \end{bmatrix}$$

A odwracalna (przykład 292).

B odwracalna, bo $\det B = 1 \neq 0$.

$$AXB = C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -26 & 19 \\ -7 & 5 \\ -22 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 4 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = X.$$

Definicja.

Minorem stopnia $k \in \mathbb{N}$ macierzy $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ nazywamy dowolną macierz $B \in \mathcal{M}(k)$ utworzoną z macierzy A przez wykreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn, gdzie $(k \leq \min(m, n))$.

OBSERWACJA

Macierz $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ ma $\binom{m}{k} \binom{n}{k}$ minorów stopnia k , gdzie $k \leq \min(m, n)$.

Przykład 295

Przykładowymi minorami stopnia 2 macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ są:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definicja.

Rzędem macierzy nazywamy maksymalny stopień jej niezerowego minora (rząd macierzy zerowej jest równy 0).

OZNACZENIE Rząd macierzy A oznaczamy $r(A)$.

Przykład 296

Policzyć rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Macierz A posiada 4 minory stopnia 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 10 - 6 - 2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 30 - 12 = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 5 + 6 = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Wszystkie są zerami, więc } r(A) < 3 \\ \text{Ale np. } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Twierdzenie (Własności rzędu macierzy)

- (1) $A \in \mathcal{M}(m \times n) \Rightarrow r(A) \leq \min(m, n)$,
- (2) $A \in \mathcal{M}(n)$ jest macierzą nieosobliwą $\Rightarrow r(A) = n$,
- (3) $r(A^T) = r(A)$.

Twierdzenie (Operacje elementarne nie zmieniające rzędu macierzy)

Rząd macierzy się nie zmienia, jeżeli

- (1) usuniemy z niej lub dodamy kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer;
- (2) zamienimy miejscami jej dwie kolumny (wiersze);
- (3) przemnożymy kolumnę (wiersz) przez liczbę różną od zera;
- (4) do jej kolumny (wiersza) dodamy inną kolumnę (wiersz) przemnożoną przez dowolną liczbę.

UWAGA:

W praktyce rząd macierzy liczymy sprowadzając macierz do tzw. „postaci schodkowej” (z wykorzystaniem powyższego twierdzenia). postępujemy podobnie jak w algorytmie Gaussa. Końcowa liczba „schodków” jest równa rządowi macierzy.

Przykład 297

Policzyć rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 16 \\ -3 & -1 & -9 & 5 \\ 2 & -2 & -2 & -14 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 4 & -3 & -1 & -24 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 & r \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 16 \\ -3 & -1 & -9 & 5 \\ 2 & -2 & -2 & -14 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 4 & -3 & -1 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{w1 \leftrightarrow w4} r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ -3 & -1 & -9 & 5 \\ 2 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 4 & -3 & -1 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} w2+3w1 \\ w3-2w1 \\ w5-4w1 \\ = \end{matrix}} r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 15 & 20 \\ 0 & -6 & -18 & -24 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -11 & -33 & -44 \end{bmatrix} \begin{matrix} w2:5 \\ w3:(-6) \\ w4:4 \\ w5:(-11) \\ = \end{matrix} \\
 & = r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} w3-w2 \\ w4-w2 \\ w5-w2 \\ = \end{matrix}} r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2, \\
 & \text{bo } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (alternatywnie: mamy dwa schodki)}.
 \end{aligned}$$